Lösungshinweise Blatt 3

7a) $$\underline{f(A)\varphi_\ell} = \sum_n c_n \underbrace{A^n \varphi_\ell}_{a_\ell^n \varphi_\ell} = \left(\sum_n c_n a_\ell^n\right)\varphi_\ell = \underline{f(a_\ell)\varphi_\ell}$$

$$A = \sum_\ell a_\ell |\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell| , \quad f(A) = \sum_\ell f(a_\ell)|\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell|$$

7b) $$f(A)^+ = \left(\sum_n c_n A^n\right)^+ = \sum_n c_n^* (A^n)^+ \underset{c_n \in \mathbb{R}}{=} \sum_n c_n (A^+)^n = f(A^+)$$

7c) $$(U^+AU)^n = \underbrace{U^+A\overbrace{U\,U^+}^{1}AU}\ \underbrace{\overbrace{U^+}A\overbrace{U\,U^+}^{1}AU}\ \overbrace{U^+}^{1}\cdots\overbrace{U\,U^+}^{1}AU$$

n mal

$$= U^+A^nU \quad \rightarrow \quad \text{Beh.}$$

8a) $$\dot{A}_H(t) = \frac{d}{dt}\left(U_t^+ A U_t\right) = (\dot{U}_t)^+ A U_t + U_t^+ A \dot{U}_t$$

mit $$\dot{U}_t = \frac{d}{dt} e^{-iHt/\hbar} = -\frac{i}{\hbar} H \underbrace{e^{-iHt/\hbar}}_{U_t} = -\frac{i}{\hbar} H U_t \underset{[H,U_t]=0}{=} -\frac{i}{\hbar} U_t H$$

Folgt $$\dot{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} H \underbrace{U_t^+ A U_t}_{A_H(t)} - \frac{i}{\hbar} \underbrace{U_t^+ A U_t}_{A_H(t)} H$$

$$= \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)] .$$

8b)

(i) $\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle U_t \psi_0 | A | U_t \psi_0 \rangle$

$$= \langle \psi_0 | \underbrace{U_t^+ A U_t}_{A_H(t)} | \psi_0 \rangle = \langle A_H(t) \rangle_{\psi_0}$$

(ii) $\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} \overset{(i)}{=} \frac{d}{dt} \langle A_H(t) \rangle_{\psi_0} = \langle \dot{A}_H(t) \rangle_{\psi_0}$

konstant

8c)

H vertauscht mit U_t und U_t^+

$\rightsquigarrow [H, A_H(t)] = [H, U_t^+ A U_t] = U_t^+ [H, A] U_t$

$$= U_t^+ [H, A_H(0)] U_t$$

$\rightsquigarrow \dot{A}_H(t) \overset{a)}{=} \frac{i}{\hbar} [H, A_H(t)] = U_t^+ \Big(\underbrace{\tfrac{i}{\hbar} [H, A_H(0)]}_{\hat{=}\, \dot{A}_H(0)} \Big) U_t$

d.h. $\dot{A}_H(t)$ folgt der Zeitent. im Heisenberg-Bild: $\dot{A}_H(0) \xrightarrow{t} \dot{A}_H(t) = U_t^+ \dot{A}_H(0) U_t$;

$\rightsquigarrow \ddot{A}_H(t) = \frac{d}{dt} (\dot{A}_H(t))$ kann nach 8a) bestimmt werden:

$$\ddot{A}_H(t) \overset{a)}{=} \frac{i}{\hbar} [H, \dot{A}_H(t)] = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \big[H, [H, A_H(t)]\big] \equiv \left(\frac{i}{\hbar} [H, \cdots]\right)^2 A_H(t)$$

n-fache Iteration dieses Beweisschritts ergibt

$$A_H^{(n)}(t) = \left(\frac{i}{\hbar}[H, \cdots]\right)^n A_H(t)$$

8d)

$$A_H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_H^{(n)}(0)\, t^n \overset{c)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar}[H, \ldots]\right)^n A_H(0)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}[H, \cdots] t} A_H(0) \quad .$$

9a)

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2i\sigma_3$$

Rest analog.

9b) nach 8d) ist $(\sigma_1)_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}[H, \cdots] t}\, \sigma_1$

$$= e^{-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3, \ldots]}\, \sigma_1 \quad ,$$

mit 9a) folgt:

$$-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3, \sigma_1] = \Omega t\, \sigma_2$$

$$\hookrightarrow \left(-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3, \ldots]\right)^2 \sigma_1 = -(\Omega t)^2\, \sigma_1$$

$$\hookrightarrow \left(-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3, \ldots]\right)^3 \sigma_1 = -(\Omega t)^3\, \sigma_2$$

$$\hookrightarrow \left(-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3, \ldots]\right)^4 \sigma_1 = +(\Omega t)^4\, \sigma_1$$

d.h. $\left(-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3,\dots]\right)^{2\ell}\sigma_1 = (-1)^{\ell}(\Omega t)^{2\ell}\sigma_1$

$\left(-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3,\dots]\right)\sigma_1 = (-1)^{\ell}(\Omega t)^{2\ell+1}\sigma_2$

$\rightarrow\ e^{-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3,\dots]}\sigma_1 = \cos(\Omega t)\,\sigma_1 + \sin(\Omega t)\,\sigma_2 \overset{!}{=} (\sigma_1)_H(t)$

analog: $e^{-i\frac{\Omega t}{2}[\sigma_3,\dots]}\sigma_2 = -\sin(\Omega t)\sigma_1 + \cos(\Omega t)\sigma_2 \overset{!}{=} (\sigma_2)_H(t)$

wegen $[H,\sigma_3]=0$: $(\sigma_3)_H(t) = \sigma_3$.

9c)

$\langle\mu_x\rangle_{\psi(t)} = \langle\mu_0\sigma_1\rangle_{\psi(t)} = \mu_0\langle(\sigma_1)_H(t)\rangle_{e_{x+}}$

9b)

$= \mu_0\cos(\Omega t)\underbrace{\langle\sigma_1\rangle_{e_{x+}}}_{=1} + \mu_0\sin(\Omega t)\underbrace{\langle\sigma_2\rangle_{e_{x+}}}_{=0}$

$= \mu_0\cos(\Omega t)$.

9d)

Larmorpräzession um $\alpha = \Omega t$

$\overset{!}{\widehat{=}}$ Rotation um e_3-Achse des S-G.-Magneten

um Winkel $\alpha = -\Omega t$

$\rightarrow$

$\rightsquigarrow \quad \sigma_{\vec{u}} := \cos\alpha \; \sigma_1 \; - \sin\alpha \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

ist Spin-komponente bzgl. Achse $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\sigma_{\vec{u}}$ besitzt EWe ± 1 zu EVen

$$\varphi_{\vec{u}\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \\ e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$\hat{=}$ $\pm$ Polarisation des Spins $\parallel$ $\vec{u}$-Achse.