Lösungshinweise Blatt 8

29. $$a^{(+)} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(x \underset{(-)}{+} i\, p/m\omega \right)$$

$$\rightarrow \quad x = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a^+ + a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \ell\, (a^+ + a)$$

$$p = i\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} (a^+ - a) = \frac{i}{\sqrt{2}}\, \frac{\hbar}{\ell}\, (a^+ - a)$$

$$\rightarrow \quad x^2 = \frac{\ell^2}{2}\left(a^{+2} + a^2 + a^+a + \underbrace{a a^+}_{= \underbrace{[a, a^+]}_{=1} + a^+ a} \right)$$

$$= \ell^2 \left(a^+a + \frac{1}{2} + \frac{a^{+2} + a^2}{2} \right)$$

$$p^2 = \frac{-\hbar^2}{2\ell^2} \left(a^{+2} + a^2 - a^+a - a a^+ \right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{\ell^2} \left(a^+a + \frac{1}{2} - \frac{a^{+2} + a^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \quad \langle x^2 \rangle_{|n\rangle} = \ell^2 \underbrace{\langle n | a^+a + 1/2 | n \rangle}_{= n + 1/2} + \frac{\ell^2}{2} \underbrace{\langle n | a^{+2} + a^2 | n \rangle}_{= 0}$$

$$= \ell^2 (n + 1/2)$$

analog: $$\langle p^2 \rangle_{|n\rangle} = \frac{\hbar^2}{\ell^2} (n + 1/2)$$

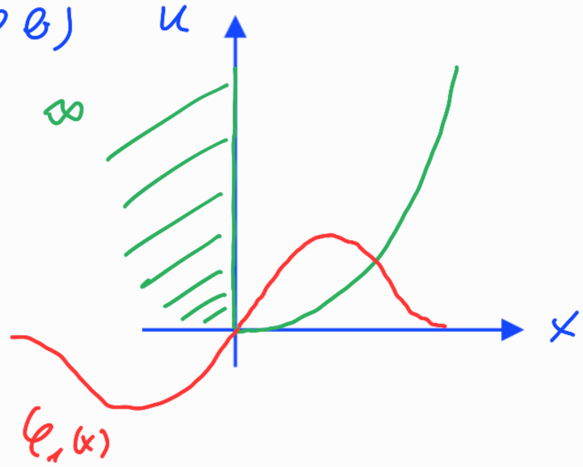
$$\rightarrow \quad (\Delta x \Delta p)_n = \hbar (n + 1/2)$$

30 a) • $\varphi_0(x) \sim e^{-x^2/2\ell^2}$ gerade!

• $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \underbrace{\left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\text{ungerade!}} \varphi_n(x)$

$\rightarrow$ $\varphi_{2\ell}(x)$ gerade, $\varphi_{2\ell+1}(x)$ ungerade

30 b)



genau die $\varphi_n(x)$ mit n ungerade erfüllen

(i) stat. Schrödingergl. für $x > 0$

(ii) Randbedingung $\underline{\varphi_n(0) = 0}$!

$\rightarrow$ Eigenfunktionen $\psi_\ell(x) = \varphi_{2\ell+1}(x)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

zu Eigenenergien $E_\ell = \hbar\omega(2\ell + 3/2)$.

31. Unter Beachtung von $[A, B] \neq 0$:

$\dot{f}_1(t) = e^{At} A e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt}$

$= e^{At}(A+B)e^{Bt} = e^{At}(A+B)e^{-At} f_1(t)$

mit $e^{At} A e^{-At} = A$ und

$$e^{At} B e^{-At} = B + [A,B]t + \underset{\uparrow}{0}$$

Terme von Ordnung t^2 und höher verschwinden wegen $[A,[A,B]] = 0$.

also $\dot{f}_1(t) = (A + B + [A,B]t) f_1(t)$

d.h. $f_1(t)$ spez. Lsg. der DGL

$$\dot{f}(t) = (A + B + [A,B]t) f(t) \qquad (*)$$

zum AW $f(0) = \mathbb{1}$; wegen Vertauschbarkeit von $A+B$ und $[A,B]$ allg. Lsg. der DGL $(*)$ wie gewohnt:

$\rightarrow$ $f(t) = f_0 \, e^{(A+B)t + \frac{1}{2}[A,B]t^2}$

$\rightarrow$ spez. Lsg. $f_1(t) = \mathbb{1} \, e^{(A+B)t + \frac{1}{2}[A,B]t^2}$,

$$\rightarrow \quad e^A e^B \underset{\text{Def.}}{=} f_1(1) = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} .$$

32a) nach Vorlsg.

$$D(\underset{=}{u}+i\underset{=}{v}) = \underbrace{e^{iuv}}_{\text{irrelevante Phase}} \underbrace{\tilde{T}(\sqrt{2}\tfrac{\hbar}{\ell}\underset{=}{v})}_{\text{Impulstransl.}} \underbrace{T(\sqrt{2}\,\ell\,\underset{=}{u})}_{\text{Translation}}$$

$$\rightarrow \langle x\rangle_{\kappa(\alpha)} = \sqrt{2}\,\ell\ \mathrm{Re}\,\alpha$$

$$\langle p\rangle_{\kappa(\alpha)} = \sqrt{2}\,\frac{\hbar}{\ell}\ \mathrm{Im}\,\alpha$$

$$\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle_{\kappa(\alpha)} = \langle x^2\rangle_{|0\rangle} = \ell^2$$

$$\langle (p-\langle p\rangle)^2\rangle_{\kappa(\alpha)} = \langle p^2\rangle_{|0\rangle} = \frac{\hbar^2}{\ell^2}$$

32b) Da $[a^\dagger, a] = -1$ mit $a^\dagger, a$ kommutiert kann mit BCH-Gl. umgeformt werden:

$$D(\alpha) = e^{\overbrace{\alpha a^\dagger}^{A} + \overbrace{-\alpha a}^{B}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}\underbrace{[a^\dagger, a]}_{=-1}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha a}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}\, e^{\alpha a^\dagger - \alpha a}.$$

32c)

$$|\kappa(\alpha)\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

$$\overset{b)}{=} e^{-|\alpha|^2/2}\, e^{\alpha a^\dagger} \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n |0\rangle}^{=|0\rangle!}$$

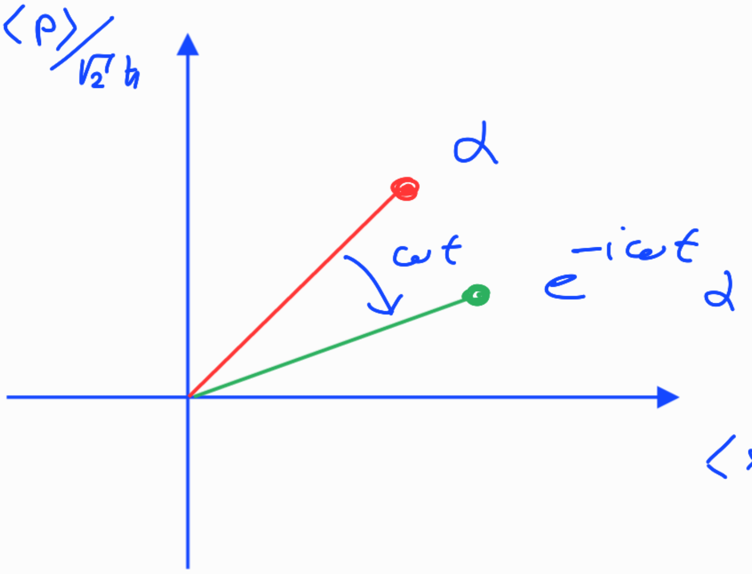
$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n \underbrace{(a^\dagger)^n |0\rangle}_{=\sqrt{n!}\,|n\rangle} = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

32 d) mit $U(t)|n\rangle = e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$

und es folgt

$$U(t)|\varepsilon(\alpha)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t}|n\rangle$$

$$= \underbrace{e^{-i\frac{\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle}_{\hat{=}\ |\varepsilon(e^{-i\omega t}\alpha)\rangle}$$



32 e)

$$a|\varepsilon(\alpha)\rangle \overset{1)}{=} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\underline{\underline{n=1}}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \overbrace{a|n\rangle}^{=\sqrt{n}|n-1\rangle}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\underline{\underline{n=1}}}^{\infty} \frac{\alpha\,\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle$$

$$= \alpha\, e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{\underline{\underline{n=0}}}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \alpha|\varepsilon(\alpha)\rangle$$