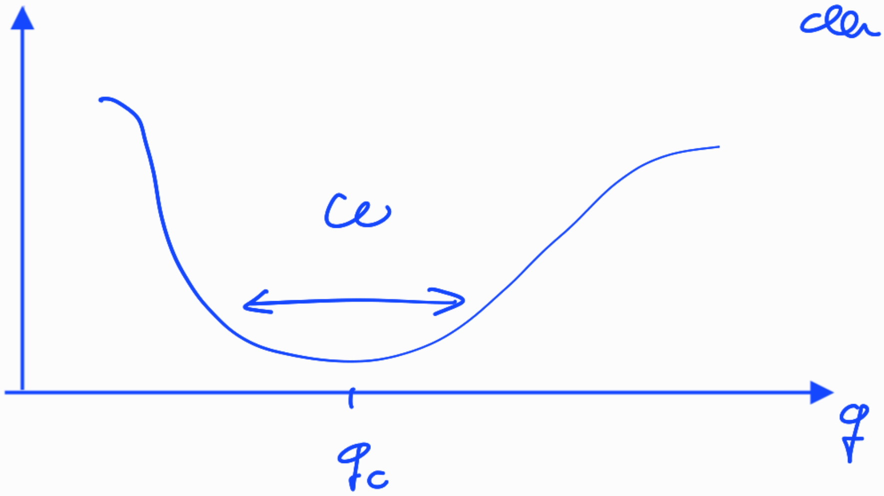
Harmonischer Oszillator

Teilchen im 1D-Potenzial $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$

$$\rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

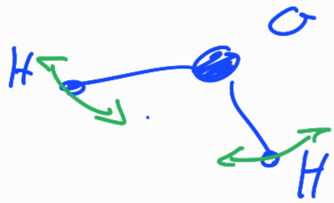
$$\hookrightarrow \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

$\hat{=}$ Freiheitsgrad q eines allg. Systems in Gleichgewichtslage: harm. Schwingen der Frequenz ω!

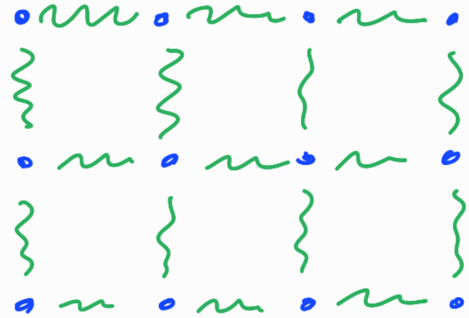


→ QM des harm. Oszillators von allg. Relevanz!

Beispiele: • Molekülschwingungen:

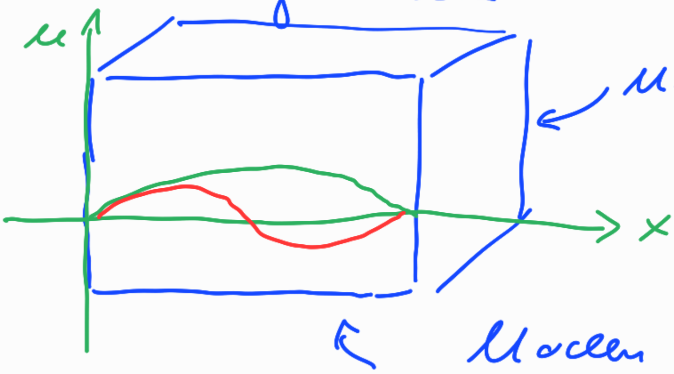


- Gitterschwingungen:



$\Rightarrow$ Dichte<u>wellen</u> in elast. Medien
("Schall")

- elektromagnetische Wellen im <u>Resonator</u>, <u>Hohlraum</u>, Kavität



Metall

$u_k(x)$

Moden des el. mg. Felds:

$$\rightarrow \quad \Delta u_k(x) = -|k|^2 u_k(x)$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{E}(x,t) = \sum_k f_k(t)\, u_k(x)$$

elektr. Feldstärke

$$\Rightarrow \quad \ddot{f}_k(t) + \omega_k^2 f_k(t) \overset{!}{=} 0$$

harm. Oszillation der Freq. $\omega_k \overset{!}{=} c|k|$

QM der Hohlraumstrahlung

$\hat{=}$ QM des harm. Oszillators!

<u>Plancksche Quantisierungshypothese (1900):</u>

Energie E_k in einer Mode u_k ist

gequantelt in Vielfachen von $\hbar\omega_k$,

d.h. $\boxed{E_k = \hbar\omega_k \cdot n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Stat. Physik

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{\hbar\omega_k}{e^{\hbar\omega_k/kT} - 1} \begin{cases} kT & kT \gg \hbar\omega \\ \hbar\omega_k \, e^{-\frac{\hbar\omega_k}{kT}} & kT \ll \hbar\omega \end{cases}$$

therm.-dyn. Erwartungswert

Modenabzählung

$$\boxed{I(\omega) = c\,\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}}$$

Plancksche Strahlungsformel.

QM des harm. Oszill. $\rightarrow$ QM des el.-mag. Felds

$\rightsquigarrow$ Quantenfeldtheorie des el.mag. Felds!

hier: $H \overset{!}{=} \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$

wir zeigen: Energieeigenwerte (Spektrum)

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

zu Energiezuständen $|\varphi_n\rangle = |n\rangle$ mit

Wellenfkt.en:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi \ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/2\ell^2}, \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\to \varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_n(x)$$

1. Methode: analytische Methode:

normierbare Lösungen ψ_E der stat. S.GL:

$$E\,\psi_E(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi_E(x)$$

$\longrightarrow$ $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$; $\varphi_n(x)$: Hermite-Polynome!

hier: algebraische Methode (Dirac, Born, ...)

Ausgangspunkt:

$$\boxed{\begin{aligned} a &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \\ a^{+} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \end{aligned}}$$

$$\rightsquigarrow \quad [a, a^{+}] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega} \right]$$

$$= \frac{i}{2\hbar}\Big(\underbrace{-[x, p]}_{-i\hbar} + \underbrace{[p, x]}_{-i\hbar} \Big) = \mathbb{1} \quad !$$

$$\boxed{[a, a^{+}] = 1}$$

Darstellung von x, p und H in a, a^{+}:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^{+} + a)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^{+} - a)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left(-(a^+ - a)^2 + (a^+ + a)^2 \right)$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^+ + a)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a^+ - a)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left(a^+ a + a a^+ \right) 2 =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(a^+ a + \underbrace{a a^+}_{\underbrace{[a, a^+]}_{=1} + a^+ a} \right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{H = \hbar\omega\left(a^+ a + \tfrac{1}{2}\right)}$$

Spektrum $a^+ a$ $\longrightarrow$ Spektrum H

(ν EW von $a^+ a$ $\longrightarrow$ $E_\nu = \hbar\omega(\nu + \frac{1}{2})$ EW von H)

Eigenschaften des Operators $N := a^\dagger a$

$\rightarrow$ Spektren von N, H !

- N hermitesch:

$\ulcorner$ $N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = N$ $\perp$

$\rightarrow$ reelle Eigenwerte $\nu_1, \nu_2, \ldots$

Eigenzustände $|\varphi_{\nu_1}\rangle, |\varphi_{\nu_2}\rangle, \ldots$

(i) N positiv ($N \geq 0$): Eigenwerte von N sind nicht negativ!

$\ulcorner$

sei ν EW von N zum EZ $|\varphi_\nu\rangle$:

$$\nu = \langle \varphi_\nu | N | \varphi_\nu \rangle = \langle \varphi_\nu | a^\dagger a | \varphi_\nu \rangle$$

$$= \langle a\varphi_\nu , a\varphi_\nu \rangle = \| a |\varphi_\nu\rangle \|^2 \geq 0$$

insb.:

(ii) $\nu = 0 \iff a|\varphi_\nu\rangle \overset{!}{=} 0$

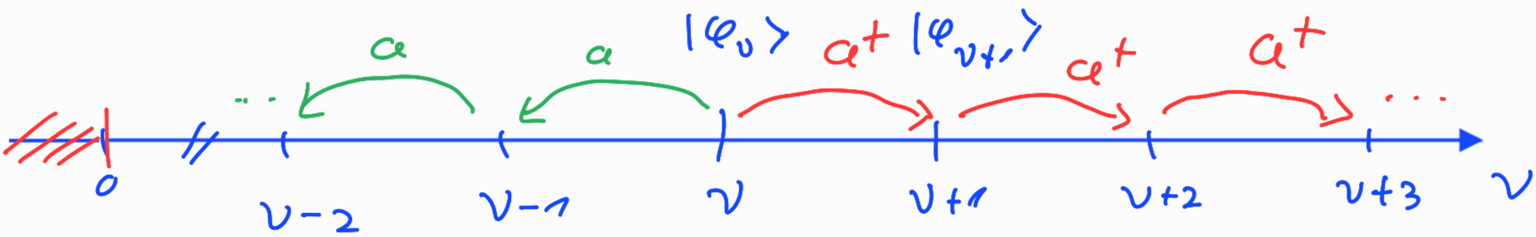
(iii)

- $[N, a] = [a^+ a, a] = a^+ \overset{0}{\overset{\shortparallel}{[a,a]}} + \overset{-1}{\overset{\shortparallel}{[a^+, a]}}\, a$

$$\boxed{\begin{aligned} &[N, a] = -a \\ &[N, a^+] = [a^+ a, a^+] = a^+ \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(iv)} \quad |\varphi_\nu\rangle \text{ ist EZ von } N \text{ zum EW } \nu \\[1em] \Longrightarrow \begin{cases} a^+ |\varphi_\nu\rangle \text{ EZ zum EW } \nu+1 \; \checkmark \\ a\, |\varphi_\nu\rangle \text{ EZ zum EW } \nu-1 \; \checkmark \end{cases} \end{array}}$$

a, a^+ : "Leiteroperatoren"



$$N\, a^+ |\varphi_\nu\rangle = (\underbrace{[N, a^+]} + a^+ \underbrace{N})\, |\varphi_\nu\rangle$$

$$= (a^+ + a^+ \nu)\, |\varphi_\nu\rangle = (\nu+1)\, a^+ |\varphi_\nu\rangle$$

$$N\, a |\varphi_\nu\rangle = (\underbrace{[N, a]} + a N)\, |\varphi_\nu\rangle$$

$$= (-a + a \nu)\, |\varphi_\nu\rangle = (\nu-1)\, a |\varphi_\nu\rangle$$

Problem: scheinbarer Widerspruch zwischen Eigenschaften (i) und (iv)!

Lösung: EW ν muss ganzzahlig sein!

$$\nu = n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \quad a^n |\varphi_n\rangle = c_n |\varphi_0\rangle \neq 0$$

$$\rightarrow \quad a^{n+1} |\varphi_n\rangle = c_n\, a |\varphi_0\rangle \underset{(ii)}{=} 0 \ !$$

$$\vdots$$

$$a^{n+m} |\varphi_n\rangle = 0 \ !$$

$\rightarrow$ Eigenwerte von $N = a^\dagger a$ sind genau die nicht-neg. ganzen Zahlen

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\rightarrow$ Eigenwerte von $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ sind $\boxed{E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) \ !}$

Zustände: $|\varphi_\nu\rangle$ / normierten EZ zum EW ν:

$$\underline{\underline{\| a^+ |\varphi_\nu\rangle \|^2}} = \langle \varphi_\nu | a a^+ | \varphi_\nu \rangle$$

$$= \langle \varphi_\nu | \underbrace{a^+ a}_{= N} + \underbrace{[a, a^+]}_{= 1} | \varphi_\nu \rangle$$

$$= \langle \varphi_\nu | N + 1 | \varphi_\nu \rangle$$

$$= \langle \varphi_\nu | \nu + 1 | \varphi_\nu \rangle$$

$$= \underline{\underline{\nu + 1}}$$

$$|\varphi_{\nu+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} a^+ |\varphi_\nu\rangle$$

$\rightarrow$ $$\boxed{|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^+ |n\rangle}$$

<u>analog</u>: $$\boxed{|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a |n\rangle}$$