2. Halbzeit:

- harm. Oszillator: kohärente Zustände
- Störungstheorie
- Unschärferelationen
- Drehimpuls
- Zentralpotenzial
- q.m. Messung, Dekohärenz, Bellsche Ungl.

Letzte Vrlsg.: 1D harm. Oszillator:

$$H = \frac{1}{2m} \underline{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \underline{x}^2$$

hilfreich:

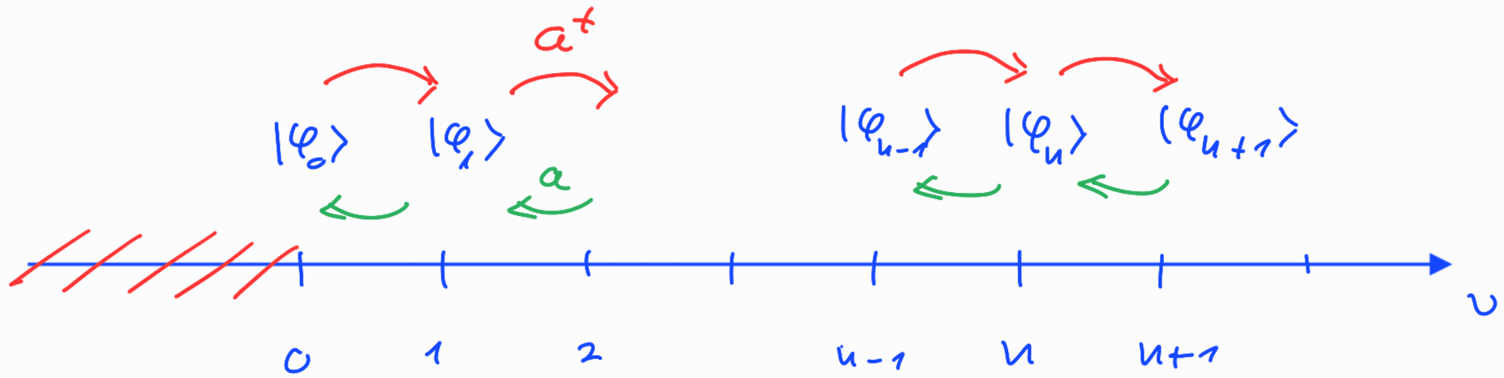
$$\boxed{\begin{aligned} a &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \\ a^+ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \end{aligned}}$$

- $[a, a^+] = 1$
- $H = \hbar\omega \left(\underbrace{a^+ a}_{=: N} + \frac{1}{2} \right)$

- N positiv

- $|\varphi_\nu\rangle$ EZ von N zum EW ν

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{a^+}|\varphi_\nu\rangle \text{ EZ zum EW } \underline{\nu+1} \\ \underline{a}\,|\varphi_\nu\rangle \text{ EZ zum EW } \underline{\nu-1} \\ a\,\underline{|\varphi_0\rangle} = \underline{0} \end{cases}$$



Eigenwerte von N:

$$\nu \equiv n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$\rightarrow$ Eigenenergien des harm. Osz. $\quad H = \hbar\omega\left(\underline{N} + \frac{1}{2}\right)$:

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

für normierte EZe $|n\rangle \equiv |\varphi_n\rangle$ gilt:

$$\boxed{|n+1\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{n+1}}|n\rangle \;, \qquad |n-1\rangle = \frac{a}{\sqrt{n}}|n\rangle}$$

$$|n+1\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{n+1}}\,|n\rangle \quad , \qquad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$|n-1\rangle = \frac{a}{\sqrt{n}}\,|n\rangle \qquad\qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

check:

$$\mathcal{N}\,|n\rangle \overset{!}{=} n\,|n\rangle$$

$$\overset{\shortparallel}{a^+a}\,|n\rangle = a^+\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$= \sqrt{n}\,a^+\,|n-1\rangle$$

$$= \sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle = n|n\rangle \;!$$

$a^+a = \mathcal{N}$: Besetzungszahloperator $\quad (H = \hbar\omega(\mathcal{N}+\frac{1}{2}))$

a^+ : "Erzeuger"

a : "Vernichter"

insbes.: $\quad |1\rangle = a^+\,|0\rangle$

$$|2\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{2}}\,|1\rangle = \frac{(a^+)^2}{\sqrt{1\cdot 2}}\,|0\rangle$$

$$|3\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{3}}\,|2\rangle = \frac{(a^+)^3}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}}\,|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^+)^n\,|0\rangle}\;,$$

Eigenfunktionen: $\varphi_n(x) = \langle x | n \rangle$

$\underline{n=0}$

$$a|0\rangle \overset{!}{=} 0$$

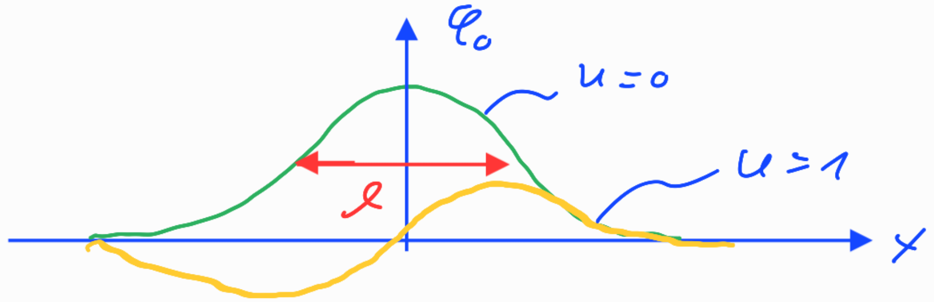
$$\hookrightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x \underset{(-)}{+} \frac{i\hbar}{m\omega} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \varphi_0(x) \overset{!}{=} 0$$

$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \left(x \underset{(-)}{+} \ell^2 \frac{\partial}{\partial x} \right)}_{\hat{=}\, a} \varphi_0(x) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi \ell^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}}$$

a^+



$\underline{n \to n+1}$:

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^+ |n\rangle$$

$$\hookrightarrow \boxed{\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_n(x)}$$

Bsp.: $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\ell} - \ell \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{e^{-x^2/2\ell^2}}{(\dots)^{1/4}}$

$$\varphi_1(x) = (\dots) \underline{\underline{x \quad e^{-x^2/2\ell^2}}}$$

Erwartungswerte: $\langle x \rangle_{|n\rangle} = 0$, $\langle p \rangle_{|n\rangle} = 0$ ✓

$$\langle x^2 \rangle_{|n\rangle} = \ell^2 (n + 1/2) \longrightarrow \langle x^2 \rangle_{|0\rangle} = \ell^2/2$$

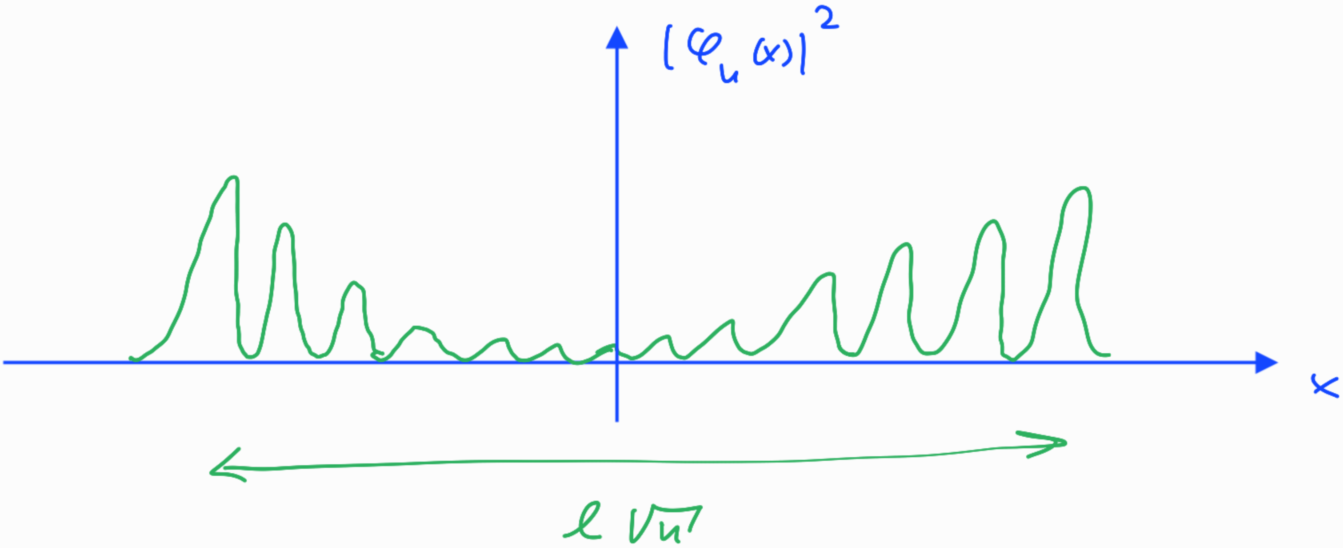
$$\langle p^2 \rangle_{|n\rangle} = \left(\frac{\hbar}{\ell}\right)^2 (n + 1/2) \longrightarrow \langle p^2 \rangle_{|0\rangle} = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}$$

(Übungsaufgabe)

Kohärente Zustände $\hat{=}$ quasi-klassische Zustände

(↑ Quanten-Optik)
R. Glauber ~1960

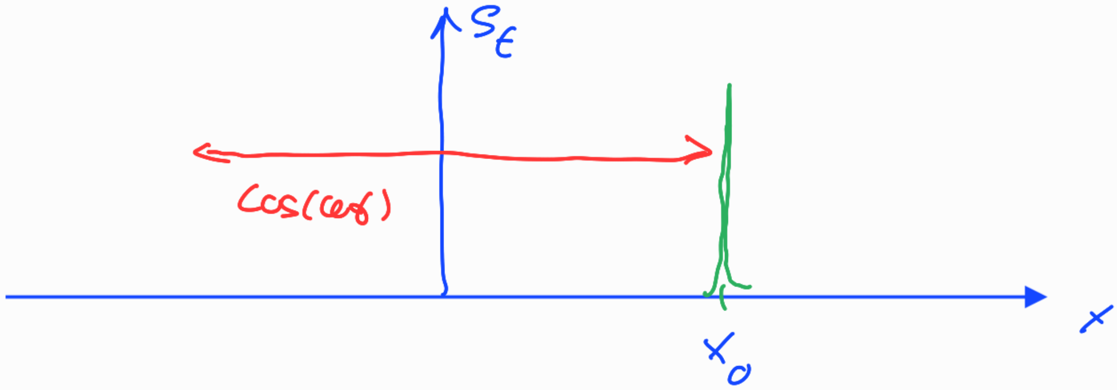
Energieeigenzustände $|n\rangle$, $n \gg 1$



- nicht-lokal
- stationär !

klassischer Zustand: $\quad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\hookrightarrow \quad \rho_t(x) = \underline{\delta}(x - x(t))$



- lokal!
- nicht-stationär!

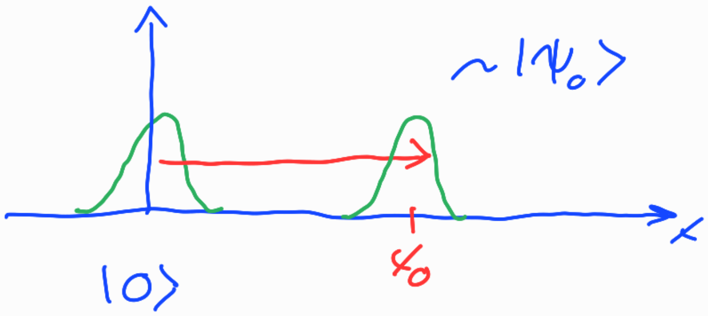
<u>suchen:</u> q.m. Zustände: $|\psi(t)\rangle$

- <u>möglichst lokal</u> $\left(\langle \Delta x^2 \rangle_t \ll \langle x^2 \rangle_t \right)$
- <u>klassische Dynamik:</u>

$$\langle x \rangle_{\psi_t} \overset{!}{=} \langle x \rangle_{\psi_0} \cos(\omega t) + \frac{\langle p \rangle_{\psi_0}}{m} \sin(\omega t)$$

<u>Idee?</u>

a) "auslenken" aus Grundzustand:



$$e^{-i x_0 \hat{p}/\hbar}$$

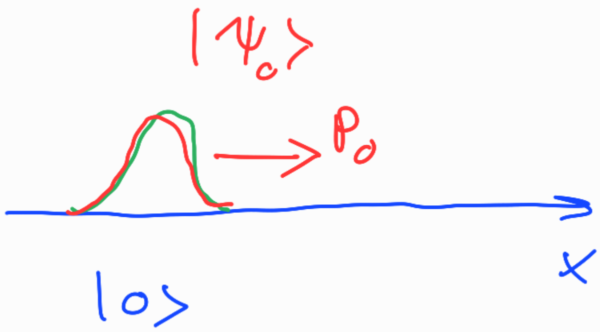
$$\parallel$$

$$|\psi_0\rangle \overset{!}{=} T(x_0)\,|0\rangle$$

$$\hookrightarrow \quad \langle x\rangle_t = \langle x\rangle_0 \cos \omega t \qquad ?!$$

b) "anschubsen":

$$|\psi_0\rangle \overset{!}{=} \tilde{T}(p_0)\,|0\rangle$$



$$e^{i \hat{x} p_0/\hbar} \qquad !$$

$$\langle x_t\rangle = \frac{\langle p\rangle_0}{m} \sin(\omega t) \qquad ?!$$

c) beides:

$$|\psi_0\rangle = \tilde{T}(p_0)\,T(x_0)\,|0\rangle$$

$$\hookrightarrow \quad \langle x_t\rangle = \langle x\rangle_0 \cos(\omega t) + \frac{\langle p\rangle_0}{m} \sin(\omega t)$$

mathematisch bequeme Beschreibung mittels

<u>Verschiebungsoperators</u> (Displacement) :

für $\alpha \in \mathbb{C}$: $$\boxed{D(\alpha) := e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}}$$

$$\left(\text{zeigen: } D(\alpha) = e^{i\varphi}\, \tilde{T}\!\left(\frac{\sqrt{2}\hbar}{\ell} \operatorname{Im}\alpha \right) \cdot T(\sqrt{2}\,\ell \operatorname{Re}\alpha) \right)$$

- $D(\alpha)$ ist unitär: $D(\alpha) = e^{A}$

  mit $A = \alpha a^+ - \alpha^* a$

  $$A^+ = \alpha^* a - \alpha a^+ = -A$$

$$\to \quad D^+(\alpha) = e^{A^+} = e^{-A} = (e^{A})^{-1} = D(\alpha)^{-1} \ \checkmark$$

- Spezialfall $\alpha = u \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\underline{A}} = u\,(a^+ - a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, u \left(-2\frac{i p}{m\omega} \right)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i p}{m\omega} \right)$$

$$= -i\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}\, u\, p = -i\, \underline{\sqrt{2}\,\ell\, u}\, \hat{p}/\hbar$$

d.h. $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{D(u)}} = e^{-i\sqrt{2}\,\ell u\,\hat{p}/\hbar} = T(\sqrt{2}\,\ell u)$!

- Spezialfall $\alpha = i v \in i\mathbb{R}$

$$\to \quad A = i v (a^\dagger + a) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, v\, (2\hat{x})$$

$$= i \underbrace{\sqrt{2}\,\frac{\hbar}{\ell}\, v}_{\equiv p_0}\, \hat{x}/\hbar$$

$$D(iv) = e^{i\frac{\sqrt{2}\hbar}{\ell} v\,\hat{x}/\hbar} = \tilde{T}\left(\frac{\sqrt{2}\hbar}{\ell} v\right) \quad !$$

allg. $\alpha = u + iv$:

$$D(\alpha) = e^{\underbrace{i\sqrt{2}\frac{\hbar}{\ell} v \cdot \hat{x}/\hbar}_{A} \; \underbrace{- i\sqrt{2}\ell u \hat{p}/\hbar}_{B}}$$

$= ?$

Baker-Hausdorff-Campbell (Glauber-Formel)

Für Operatoren A, B, die mit $[A,B]$ vertauschen

$$e^{A} e^{B} = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{A+B}$$

$$\underset{u+iv}{D(\alpha)} = e^{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{2} v u \underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{= i}/\hbar} \tilde{T}(\sqrt{2}\tfrac{\hbar}{\ell} v)\, T(\sqrt{2}\ell u)$$

$$\boxed{D(\alpha) = e^{ivu} \tilde{T}\left(\frac{\sqrt{2}\hbar}{\ell} \operatorname{Im}\alpha\right) T\left(\sqrt{2}\ell \operatorname{Re}\alpha\right)}$$

$$\overset{!}{=} e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}$$

$$\hookrightarrow \boxed{|c(\alpha)\rangle := D(\alpha)\,|0\rangle}$$

↑ Kohärente Zustände, $\alpha \in \mathbb{C}$.