letzte Vrlsg.: **kohärente Zustände**

= quasiklassische Zustände

(eines harm. Oszill.)

Verschiebungsoperator für $\alpha = u + iv \in \mathbb{C}$:

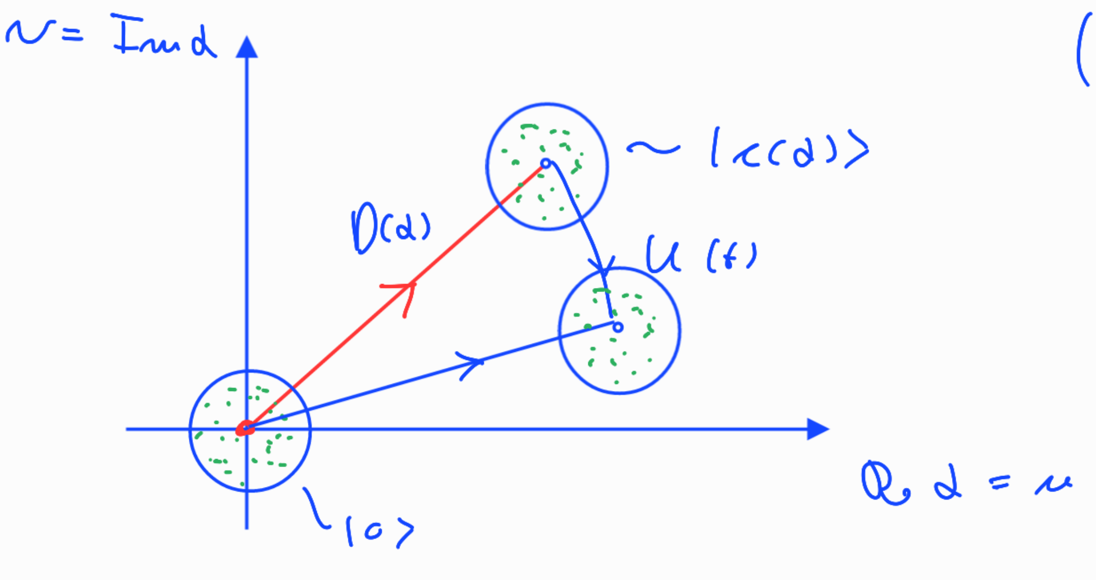
$$\boxed{\begin{aligned} D(\alpha) &:= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\ &\overset{!}{=} e^{ivu}\, \tilde{T}(\sqrt{2}\, v)\, T(\sqrt{2}\, u) \end{aligned}}$$

Impulstransl. Transl.

$(\hbar = 1,\ \ell = 1)$

→ **kohärenter Zustand**:

$$\boxed{|\kappa(\alpha)\rangle := D(\alpha)\,|0\rangle}$$



$$(\Delta x \Delta y)_{\kappa(\alpha)} = \hbar/2$$

$$\langle x \rangle_{\kappa(\alpha)} = \sqrt{2}\, u$$

$$\langle p \rangle_{\kappa(\alpha)} = \sqrt{2}\, v$$

Übung:

$$U(t)\,|\alpha(\alpha)\rangle \overset{!}{=} e^{-i\omega t/2}\,|\alpha(e^{-i\omega t}\alpha)\rangle$$

Zeitunabhängige Störungstheorie

($\hookrightarrow$ zeitabhängige St.-Th.)

allg. Problem: Hamiltonop. H eines "realen" Systems weicht geringfügig von "idealen" System ab (z.B. H-Atom, harm. Oszill., ...)

$\hookrightarrow$ Hamiltonop. H_0

d.h.
$$H = H_0 + \lambda H_1 \quad ; \quad (|\lambda| \ll 1)$$

bestimme
$$E_n(\lambda) = E_n + \delta E(\lambda)$$

$$|n(\lambda)\rangle = |n\rangle + |\delta n(\lambda)\rangle$$

Bsp.: harm. Oszill. + Anharmonizität:

$$H = \underbrace{p^2/2m + \frac{m\omega^2}{2}x^2}_{H_0} + \underbrace{\lambda\hbar\omega\left(x/\ell\right)^3}_{H_1}$$

Idee: Potenzreihenentwicklungen:

$$\begin{cases} E_n(\lambda) = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \\ |n(\lambda)\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle + \dots \end{cases}$$

↳ genüge der stat. S.-Gl:

$$(H_0 + \lambda H_1)|n(\lambda)\rangle \overset{!}{=} E_n(\lambda)\,|n(\lambda)\rangle$$

$$\rightarrow (H_0 + \lambda H_1)\left(|n^{(0)}\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle\right)$$

$$\doteq \left(E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)}\right)\left(|n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle\right)$$

λ^0-Terme: $\quad H_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle \qquad (0)$

$$\Rightarrow \quad E_n^{(0)} = E_n$$

$$|n^{(0)}\rangle = |n\rangle$$

λ^1-Terme: $\quad H_0 |n^{(1)}\rangle + H_1 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} |n^{(0)}\rangle \qquad (1)$

λ^2-Terme: $\quad H_0 |n^{(2)}\rangle + H_1 |n^{(1)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)} |n^{(1)}\rangle$

$$+ E_n^{(2)} |n^{(0)}\rangle \qquad (2)$$

zweckmäßige Normierungsbedingung:

$$\boxed{\langle n^{(0)} | n(\lambda)\rangle \overset{!}{=} 1}$$

$$\langle n^{(0)} | \left(|n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle + \dots \right) = 1$$

$$1 + \underbrace{\lambda \langle n^{(0)} | n^{(1)}\rangle + \lambda^2 \langle n^{(0)} | n^{(2)}\rangle + \dots}_{= 0\,!} = 1$$

d.h. $\langle n^{(0)} | n^{(\ell)}\rangle \overset{!}{=} 0 \qquad \ell \geq 1$

(• "$\langle n^{(0)} | \times (0)$" : $\quad E_n^{(0)} = E_n$) !

• "$\langle n^{(0)} | \times (1)$" :

$$\underbrace{\langle n^{(0)} | H_0 | n^{(1)}\rangle}_{E_n \underbrace{\langle n^{(0)} | n^{(1)}\rangle}_{=0}} + \langle n^{(0)} | H_1 | n^{(0)}\rangle \overset{!}{=} E_n^{(1)}$$

$\longrightarrow$

→ Energie $E_n(\lambda)$ in Störungsth. 1. Ordnung:

$$\boxed{E_n(\lambda) = E_n + \lambda \langle n | H_1 | n \rangle + O(\lambda^2)}$$

<u>Zustand $|n(\lambda)\rangle$ in 1. Ordnung:</u>

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} c_m |m^{(0)}\rangle \quad 2$$

mit $c_m = \langle m^{(0)} | n^{(1)} \rangle \quad \rightarrow \quad c_n = \langle n^{(0)} | n^{(1)} \rangle$

$$= 0 \quad ,$$

$$\circ \quad \langle m^{(0)} | \left(H_0 | n^{(1)} \rangle + H_1 | n^{(0)} \rangle = \underline{\underline{E_n^{(0)}}} | n^{(1)} \rangle + E_n^{(1)} | n^{(0)} \rangle \right) \quad (1)$$

$m \neq n$

$$\rightarrow \quad E_m c_m + \langle m^{(0)} | H_1 | n^{(0)} \rangle \stackrel{!}{=} E_n c_m$$

$$\rightarrow \quad c_m = \frac{\langle m | H_1 | n \rangle}{E_n - E_m} \quad !$$

$$\boxed{|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | H_1 | n \rangle}{E_n - E_m} |m\rangle}$$

$\rightarrow$ $E_n(\lambda)$ in 2. Ordnung:

- " $\langle n^{(0)} |$ (2) ":

$$\langle n^{(0)} | \Big(H_0 | n^{(2)} \rangle + H_1 | n^{(1)} \rangle = E_n^{(0)} | n^{(2)} \rangle + E_n^{(1)} | n^{(1)} \rangle + E_n^{(2)} | n^{(0)} \rangle \Big)$$

$$E_n \underbrace{\langle n^{(0)} | n^{(2)} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle n^{(0)} | H_1 \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | H_1 | n \rangle}{E_n - E_m} | m \rangle \Big)}_{\displaystyle = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_m}}$$

$$= E_n^{(2)} \quad !$$

$E_n(\lambda)$ in Störungstheorie einschließlich 2. Ordnung:

$$\boxed{E_n(\lambda) = E_n + \lambda \langle n | H_1 | n \rangle + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_m}}$$

$$\boxed{E_n(\lambda) = E_n + \lambda \langle n | H_1 | n \rangle + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_m}}$$

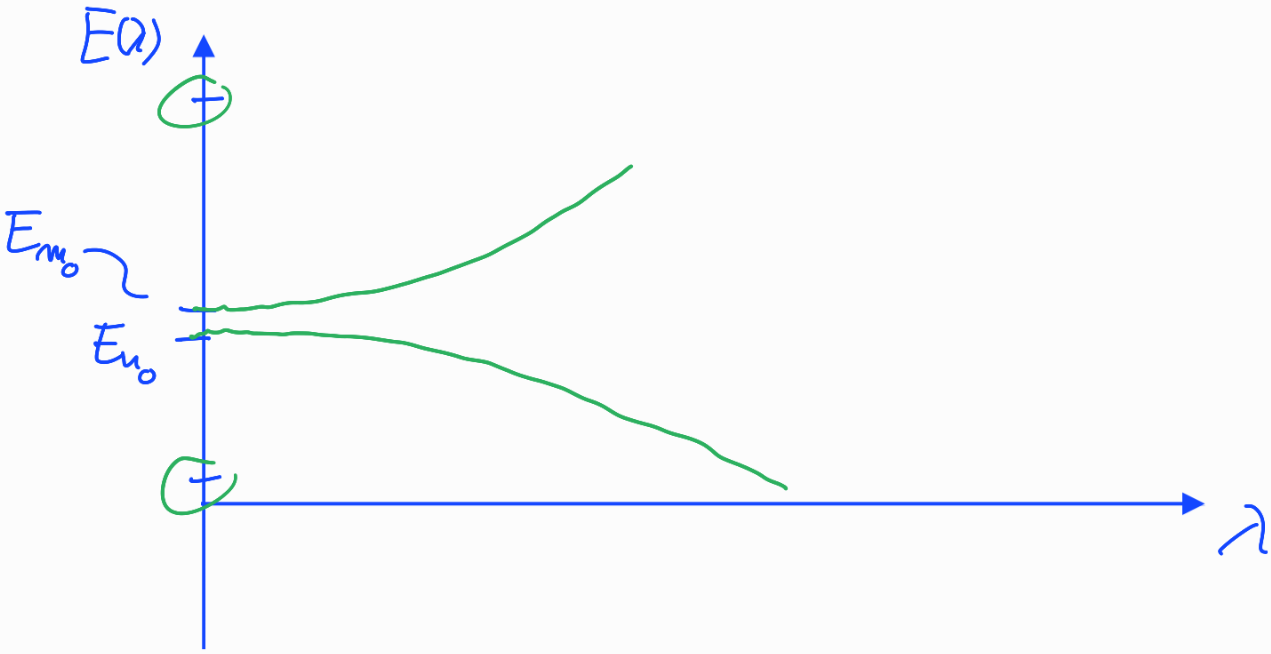
Bemerkungen:

- stillschweigende Annahme:

  keine Entartung der Energieniveaus!

  ($E_n \neq E_m$ für $n \neq m$!)

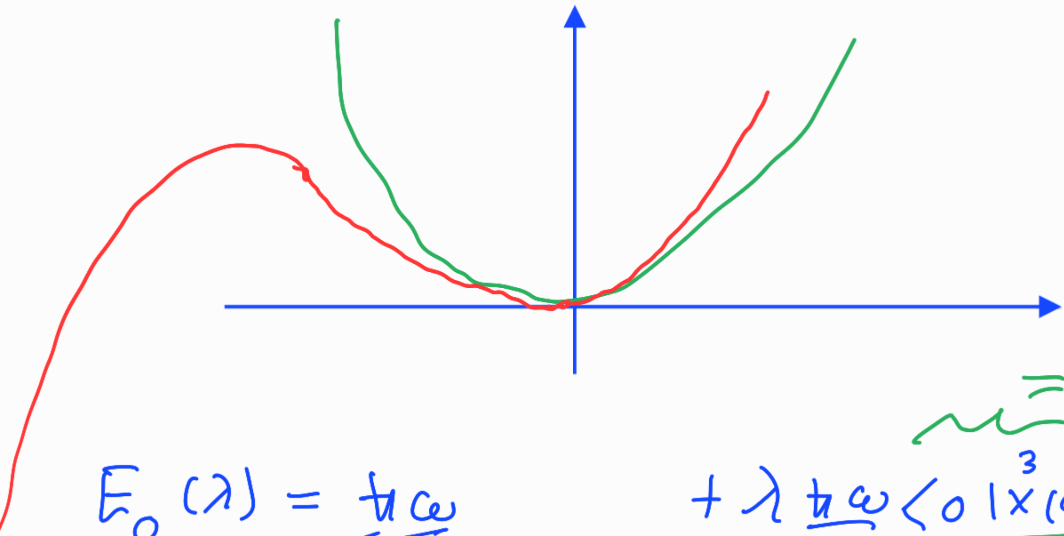
- „Niveauabstoßung:“



- Absenkung der Grundzustandsenergie E_0 durch Terme 2 Ordnung.

Bsp.:

$$H = \underbrace{p^2/2m + \frac{m\omega^2}{2}x^2}_{H_0} + \lambda \underbrace{\hbar\omega (x/\ell)^3}_{H_1}$$



$$E_0(\lambda) = \frac{\hbar\omega}{2} + \lambda \frac{\hbar\omega}{\ell^3} \underbrace{\langle 0 | x^3 | 0 \rangle}_{=0\,!} + (-)\lambda^2 (\hbar\omega)^2 \sum_{m\neq 0} \frac{|\langle m | (x/\ell)^3 | 0\rangle|^2}{m\hbar\omega}$$

NR: $\frac{x}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$

$$\langle m | \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 | 0 \rangle = \frac{1}{2^{3/2}} \langle m | (a^+ + a)^3 | 0 \rangle$$

$$(a^+ + a)^3 = \underbrace{(a^+)^3}_{m=3} + \cancel{a^+ a^+ a} + a^+ a a^+ + a a^+ a^+ + \cancel{a^+ a a} + \cancel{a a^+ a} + \cancel{a a a^+} + \cancel{a^3} \ldots$$