letzte Vrlsg.: <u>zeitunabh. Störungstheorie</u>

$$H = H_0 + \lambda H_1$$

$$E_n(\lambda) = E_n + \Delta E(\lambda)$$

$$|n(\lambda)\rangle = |n\rangle + |\delta n(\lambda)\rangle$$

bekannt   <u>kleine</u> Korrekturen

Potenzreihenentwicklung, Koeffizientenvergleich

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_n(\lambda) &= E_n + \lambda \langle n|H_1|n\rangle + \lambda^2 \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m|H_1|n\rangle|^2}{E_n - E_m} + \dots \\ |n(\lambda)\rangle &= |n\rangle + \lambda \sum_{m\neq n} \frac{\langle m|H_1|n\rangle}{E_n - E_m} |m\rangle \dots \end{aligned}}$$

Voraussetzung: $E_m \neq E_n$ für $m \neq n$!

Störungstheorie bei entarteten Energieniveaus

g-dim.

$\leftsquigarrow$ g-fach entartet : Eigenraum $\mathcal{H}_\ell \subset \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_\ell \quad : \quad H_0 |\psi\rangle = E_\ell |\psi\rangle$$

geeignete Basis $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_g\rangle$ von $\mathcal{H}_\ell$

für Störungstheorie ?

wähle ONB so, dass $\langle \varphi_k | \mathcal{H}_1 | \varphi_\ell \rangle = 0$

für $k \neq \ell$!

$\rightarrow$ gegeben durch orthonormale Eigenbasis (*)

des Op. $\tilde{H}_1 = P_\ell \, H_1 \, P_\ell \quad (= \tilde{H}_1^{\dagger})$

$\uparrow$ Projektion auf $\mathcal{H}_\ell$

(*) : $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_g\rangle$:

$\Big[\quad \langle \varphi_k | \underset{\neq \ell}{n} \rangle = 0 \, , \qquad \langle \varphi_k | \varphi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$

$\langle \varphi_k | \mathcal{H}_1 | \varphi_\ell \rangle = 0$ für $k \neq \ell$! $\Big]$

$\to$ Störungstheorie :

$$\boxed{\boxed{E_{\ell,j}(\lambda) = E_\ell + \lambda \langle \varphi_j | H_1 | \varphi_j \rangle} + \lambda^2 \sum_{m \neq \ell} \frac{|\langle m | H_1 | \varphi_j \rangle|^2}{E_\ell - E_m} \qquad j = 1, \dots, g$$

$$E_{\underset{\neq \ell}{n}}(\lambda) = E_n + \lambda \langle n | H_1 | n \rangle + \lambda^2 \sum_{\substack{m \neq n \\ \neq \ell}} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_m} + \lambda^2 \sum_{j=1}^{g} \frac{|\langle \varphi_j | H_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_\ell}}$$

$\Big[$ cf. Atomphysik : Zeeman-Effekt

.... $\Big]$

Zeitabhängige Störungstheorie

System mit Hamiltonop H_0 (z.B. H-Atom, harm. Oszill., Spin, ...) werde durch schwaches zeitabhängiges Potenzial $V(t)$ geringfügig gestört:

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

Ziel: Dynamik in Störungstheorie von $V(t)$ unter Voraussetzung von bekannten E_n, $|n\rangle$ von H_0.

z.B. zur Lsg. folg. Problems:

System zur Zeit $t=0$ in H_0-EZ. $|n\rangle$; mit welcher Wkt. $P_{nm}(t)$ befindet sich System im Zustand $|m\rangle$ zur Zeit t?

Übergangswkt.

$V(t)=0 \rightarrow P_{nm}(t)=0$!

allg.: $t=0$: $|\psi(0)\rangle$

$$\downarrow \qquad \downarrow \quad i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = \left(H_0 + V(t)\right)|\psi(t)\rangle$$

$t>0$: $|\psi(t)\rangle = U_0(t)\,|\psi(0)\rangle$

<u>Trick</u>: Trennung von H_0 - Dynamik und $V(t)$ - Dynamik ! mittels

<u>Wechselwirkungsbild</u>

- Zustand im Schrödingerbild: $|\psi(t)\rangle$

$$\left(i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle\right)$$

<u>Def</u>: <u>Zustand im Wechselwirk.-bild</u>:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle_I := e^{+iH_0 t/\hbar}\,|\psi(t)\rangle}$$

für $V(t)=0$: $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar}\,|\psi(0)\rangle$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle_I = \cancel{e^{+iH_0 t/\hbar}}\left(\cancel{e^{-iH_0 t/\hbar}}\,|\psi(0)\rangle\right) = |\psi(0)\rangle$$

Dynamik im WW-Bild:

$$i\hbar\,|\dot\psi(t)\rangle_I = i\hbar\frac{d}{dt}\Big(\overbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,|\psi(t)\rangle}^{|\psi(t)\rangle_I}\Big)$$

$$= -H_0\,|\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0t/\hbar}\Big(\underbrace{i\hbar\,|\dot\psi(t)\rangle}_{(H_0+V(t))|\psi(t)\rangle}\Big)$$

$$= -H_0\,|\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0t/\hbar}\,(H_0+V(t))\,e^{-iH_0t/\hbar}\,|\psi(t)\rangle_I$$

$$i\hbar\,|\dot\psi(t)\rangle_I = \underbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,V(t)\,e^{-iH_0t/\hbar}}_{V_I(t)}\,|\psi(t)\rangle_I$$

Def: Operator im WW-Bild:

$$V_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\,V(t)\,e^{-iH_0t/\hbar}$$

(für allg. $V(t)$)

$$\rightarrow \quad \boxed{i\hbar\,|\dot\psi(t)\rangle_I = V_I(t)\,|\psi(t)\rangle_I}$$

$$\boxed{i\hbar\, |\dot{\psi}(t)\rangle_I = V_I(t)\, |\psi(t)\rangle_I} \quad (*)$$

Dynamik von $|\psi(t)\rangle_{\underline{\underline{I}}}$ verursacht durch $V_I(t)$!

Störungstheorie = Lösung von (*) durch Iteration

0. Ordnung: $$i\hbar\, |\dot{\psi}(t)\rangle_I = 0$$

$$\rightarrow \quad |\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |\psi(0)\rangle$$

1. Ordnung: $$i\hbar\, |\dot{\psi}(t)\rangle_I^{(1)} = V_I(t)\, |\psi(t)\rangle^{(0)}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{|\psi(t)\rangle_I^{(1)} = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, V_I(t')\, |\psi(0)\rangle} \quad \cancel{(**)} \ \checkmark$$

2. Ordnung: $$i\hbar\, |\dot{\psi}(t)\rangle_I^{(2)} = V_I(t)\, \underline{|\psi(t)\rangle_I^{(1)}}$$

$$\hookrightarrow \quad |\psi(t)\rangle_I^{(2)} = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, V_I(t')\, |\psi(0)\rangle$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''\, V_I(t')\, V_I(t'')\, |\psi(0)\rangle$$

Anwendung: Übergangswkt. in 1. Ordnung

$t=0$ System in H_0-EZ $|n\rangle$,

bestimme Wkt., dass System in H_0-EZ $|m\rangle$

zur Zeit $t>0$ aufgrund $V(t)$.

$P_{nm}(t)$

$$|\psi(0)\rangle = |n\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle$$

$$\rightsquigarrow \quad P_{nm}(t) = |\langle m|\psi(t)\rangle|^2$$

$$\overset{(i)}{=} |\langle m| e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_I|^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{P^{(1)}_{nm}(t) = |\langle m|\psi(t)\rangle^{(1)}_I|^2}$$

$\Big\ulcorner$ $|\psi(t)\rangle_I := e^{+iH_0 t/\hbar}|\psi(t)\rangle$

(i) $\hookrightarrow$ $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar}|\psi(t)\rangle_I$

ii) $\langle\psi(t)|\varphi(t)\rangle = \underbrace{\langle\psi(t)|e^{-iH_0 t/\hbar}}\;\underbrace{e^{+iH_0 t/\hbar}|\varphi(t)\rangle}$

$= {}_I\langle\psi(t)|\varphi(t)\rangle_I$ $\Big\lrcorner$

für $m \neq n$:

$$P^{(1)}_{mn}(t) = \left| \langle m | \left(\overset{|\psi(0)\rangle}{\overset{\|}{|n\rangle}} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \, V_I(t) \, |n\rangle \right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \, \langle m | \underbrace{V_I(t)} | n\rangle \right|^2$$

$$\underbrace{\langle m | e^{iH_0 t/\hbar}} \, V(t) \, \underbrace{e^{-iH_0 t/\hbar} | n\rangle}$$

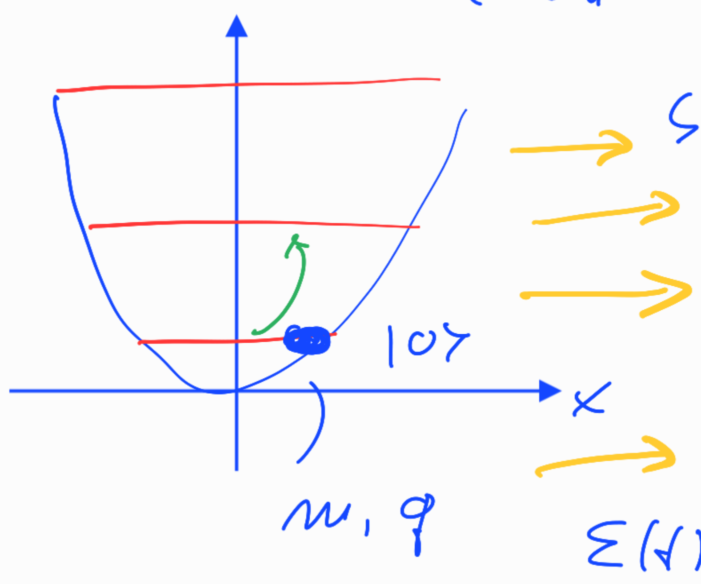
$$e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \quad \langle m | V(t) | n\rangle$$

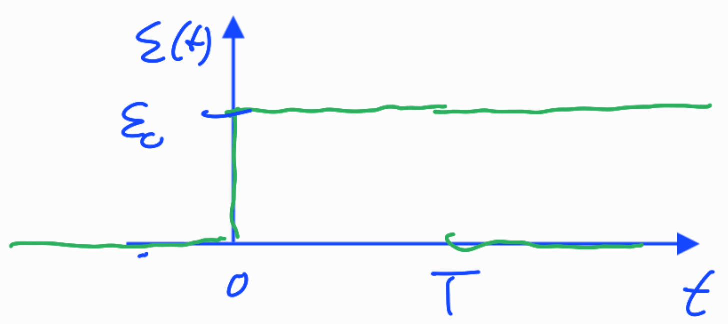
$$\boxed{P^{(1)}_{mn}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt \; e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \langle m | V(t) | n\rangle \right|^2}$$

Beispiel: H_0 = harm. Osz. $(\omega, m, a^\dagger, a)$

$(E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \; |n\rangle$

Störung: $V(t) = -q\,\mathcal{E}(t)\,x$





$$P_{01}^{(1)}(t) = \frac{1}{\hbar}\left| l \int_0^t dt' \, e^{i\omega t'} \langle 1 | \Big(-q\,\mathcal{E}(t)\,\underbrace{\frac{\hat{x}}{l}}_{\simeq \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}}\Big) | 0 \rangle \right|^2$$

$$= \underbrace{\frac{q^2 \mathcal{E}_0^2 l^2}{2\hbar^2}}_{=: c} \left| \int_0^t dt' \, e^{i\omega t'} \underbrace{\langle 1 | a^\dagger + a | 0 \rangle}_{= \langle 1 | a^\dagger | 0 \rangle + \langle 1 | a | 0 \rangle} \right|^2$$

$$\langle 1 | \underbrace{a^\dagger | 0 \rangle}_{\sqrt{1}\,|1\rangle} + \underbrace{\langle 1 | a | 0 \rangle}_{=0}, \qquad \underbrace{\sqrt{1}\,\langle 1|1\rangle}_{1}$$

$$P_{01}^{(1)}(t) = c \left| \underbrace{\int_0^t dt' \, e^{i\omega t'}}_{} \right|^2$$

$$\frac{e^{i\omega t'}}{i\omega}\Big|_0^t = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}$$

$$P_{01}^{(1)}(t) = \frac{c}{\omega^2}\left(2 - 2\cos\omega t\right)$$

$$= \frac{4c}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad !$$