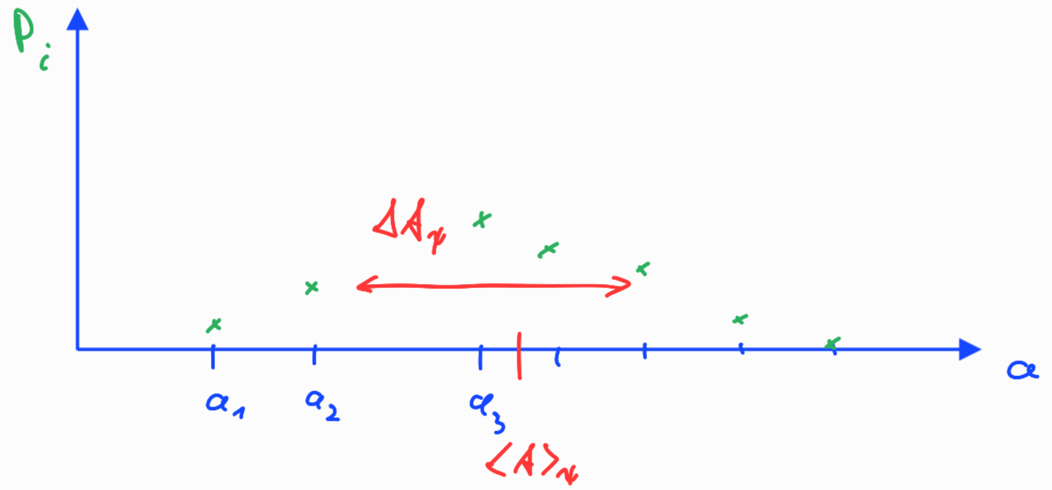
Unbestimmtheitsrelationen

- Observable A
- Messung am System im Zustand $|\psi\rangle$

$\rightarrow$ Erwartungswert $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$

Standardabweichung $\Delta A_\psi = \sqrt{\langle (A - \langle A\rangle_\psi)^2\rangle_\psi}$

(Varianz : $(\Delta A_\psi)^2$)



wir zeigen:

$$\boxed{\Delta A_\psi \, \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A,B] \rangle_\psi \right|}$$

(Kennard, Weyl, Robertson)
1927 1927 1929

z.B $A = x, \quad B = p$

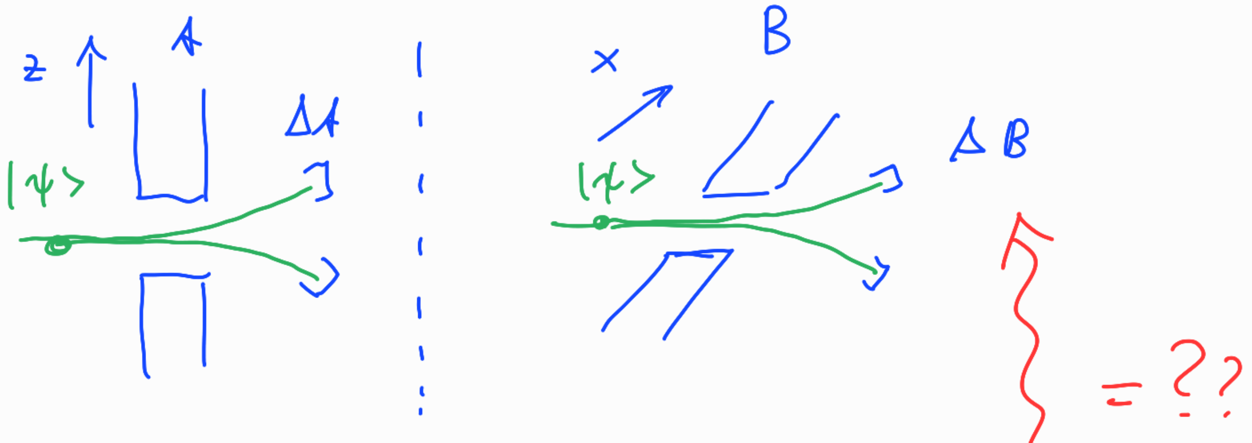
$$\rightsquigarrow \quad \Delta x_\psi \, \Delta p_\psi \geq \hbar/2 \quad !$$

• KWR: ΔA_{ψ}, ΔB_{ψ} aus A- oder B-Messung an jeweils unabhängigen System im jeweils gleichen Zustand $|\psi\rangle$

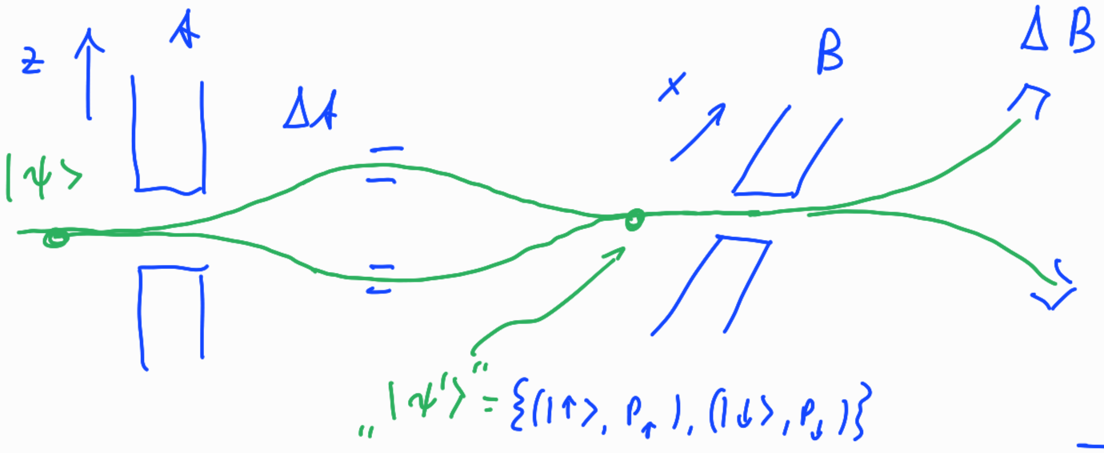
• Heisenberg (1927): $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$

wobei Δp aus Impulsmessung an Zustand $|\psi'\rangle$ nach vorhergehender Ortsmessung an demselben System mit Δx !

• KWR:



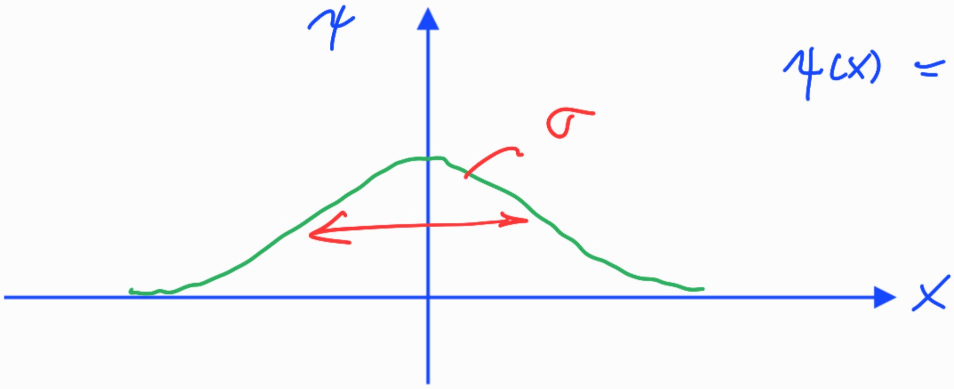
• Heisenberg:



Welche Version ist relevant?

Beispiele: $\quad |\psi\rangle, \quad \psi(x) = \langle \varphi_x | \psi \rangle$

a) freies Teilch. 1D, gaußsche Wellenfkt:



$$\psi(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}$$

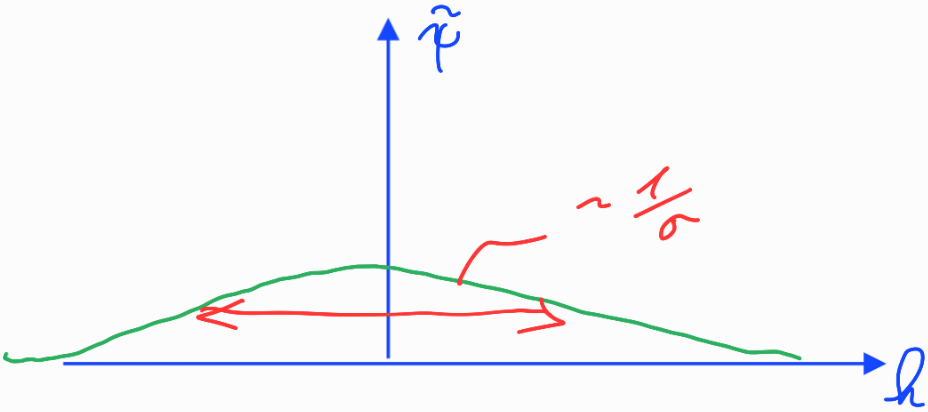
$$\langle x \rangle_\psi = 0$$

$$\Delta x_\psi = \sigma/\sqrt{2}$$

F.T.

KUR: $\quad \Delta p_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x_\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sigma}$

$$\tilde{\psi}(k) = \langle \tilde{\varphi}_k | \psi \rangle \overset{!}{=} \dots e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$



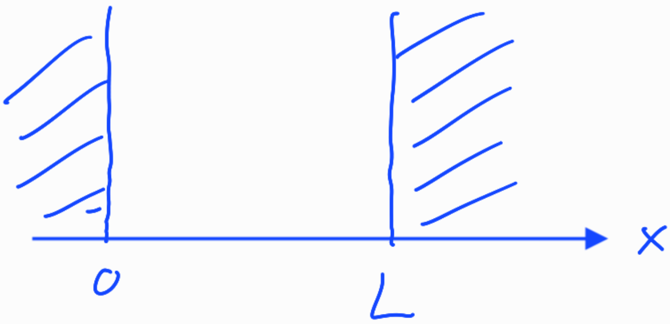
$$\Delta p_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sigma}$$

$$\Delta x_\psi \, \Delta p_\psi = \hbar/2 \quad !$$

b) Abschätzung der Grundzustandsenergie:

Teilchen im Kasten: E_0 ? ψ_0

$\Delta x_{\psi_0} \overset{!}{\simeq} L$



$$E_0 = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle_{\psi_0} \geq \left\langle \frac{\Delta p^2}{2m} \right\rangle_{\psi_0} = \frac{1}{2m} \Delta p_\psi^2$$

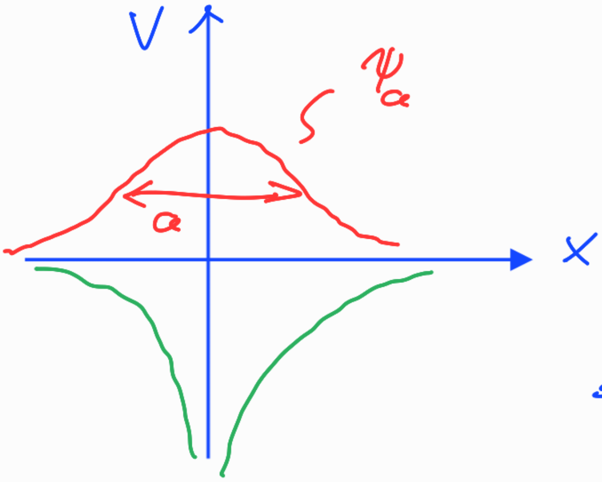
$$= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{4L^2} = \frac{1}{8} \frac{\hbar^2}{mL^2}$$

KUR: $\Delta p_\psi \geq \frac{\hbar}{2 \Delta x_{\psi_0}} = \frac{\hbar}{2L}$

($E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar^2}{mL^2}$

c) H-Atom: Abschätzung des Radius im Grundzust.

$2 a_0$



$V(x) = - \frac{e^2}{|x|}$

$\Delta x_{\psi_a} \overset{!}{=} a$

$$\langle E_{pot} \rangle_{\psi_a} = \langle -\frac{e^2}{|x|} \rangle_{\psi_a} \overset{!}{\simeq} -\frac{e^2}{a} \qquad \checkmark \quad \Delta x_{\psi_a} = a$$

$$\langle E_{kin} \rangle_{\psi_a} = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle_{\psi_a} \simeq \frac{\Delta p_\psi^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m\,a^2}$$

KUR: $\Delta p_\psi^2 \simeq \frac{\hbar^2}{a^2}$

$$E_{ges}(a) = \frac{\hbar^2}{2m\,a^2} - \frac{e^2}{a}$$

minimiere bzgl. a: $\quad 0 \overset{!}{=} -\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{a^3} + \frac{e^2}{a^2}$

(vgl. Aufg. 40) $\quad \rightsquigarrow \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0{,}5\,Å$.

Variationsprinzip

a)

freies Teilchen: Impulsunschärfe Δp nach

idealen Ortsmessung ? $\rightsquigarrow \Delta x = 0$

Heisenberg: $\quad \Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$

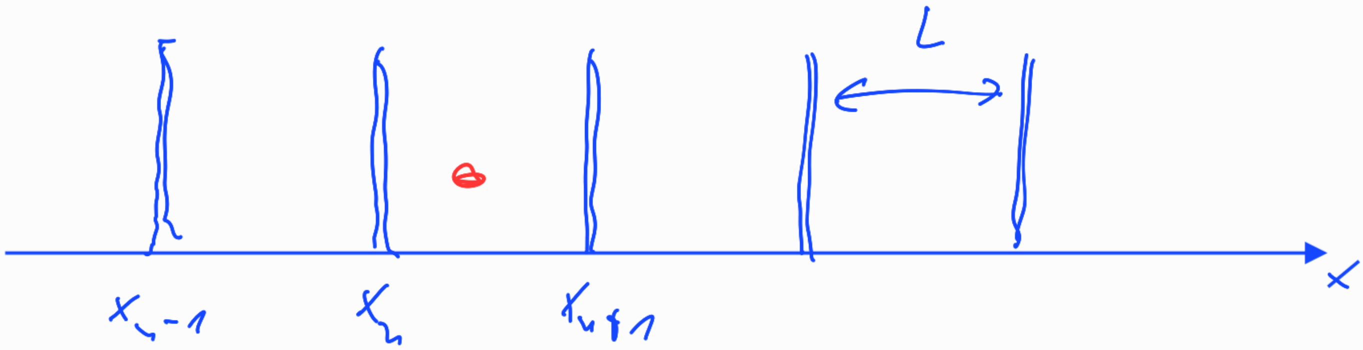
$\rightarrow \quad \Delta p \rightarrow \infty$!

$$|\psi\rangle \xrightarrow[x_0]{\text{Ortsmessung}} \underbrace{|\varphi_{x_0}\rangle}_{\mathrel{/\!/}\,|\psi'\rangle} \rightarrow \varphi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$$

$$|\psi'\rangle, \quad \tilde{\psi}'(p) = e^{ip x_0} \rightarrow |\tilde{\psi}'(p)|^2 = 1$$

$\rightarrow \quad \Delta p \rightarrow \infty$

d) Unscharfe Ortsmessung mit Unschärfe $\Delta x \overset{!}{=} L$



$$\langle x \rangle_\psi = x_n + L/2 \quad , \quad \Delta x_\psi = L$$

$$|\psi'\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \, |\varphi_\ell\rangle \, , \qquad \varphi_\ell(x) = \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin k_\ell (x - x_n)$$

$$k_\ell = \frac{\pi}{L} \cdot \ell \, ,$$

$$\langle p \rangle_{|\psi'\rangle} = 0$$

$$\Delta p_{\psi'}^2 = \langle p^2 \rangle_{\psi'}$$

$$\geq \langle p^2 \rangle_{\varphi_1} = \hbar^2 k_1^2 = \frac{\hbar^2}{L^2} \cdot \pi^2$$

$$\rightarrow \quad \Delta p_{\psi'} \, \Delta x_\psi = \hbar \pi \quad !$$

- Unbestimmtheitsrelationen nach Heisenberg:
  - Werner 2004
  - ⋮
  - Busch, Lahti, Werner 2013 ✓

→ hier: KWR:

$$\underline{\Delta A_\psi \, \Delta B_\psi} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A,B] \rangle_\psi \right| \quad !$$

Beweis: für $x \in \mathbb{R}$: $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$

o.B.d.A.: $\langle A \rangle_\psi \overset{!}{=} 0$, $\langle B \rangle_\psi \overset{!}{=} 0$

$$0 \leq \| (A + iBx) |\psi\rangle \|^2$$

$$= \langle \psi | (A - iBx)(A + iBx) | \psi \rangle$$

$\langle \psi | O | \psi \rangle \overset{?}{=} \langle \psi | O | \psi \rangle^* = \langle \psi | O^\dagger | \psi \rangle$

$$= \underbrace{\langle A^2 \rangle_\psi}_{= \Delta A_\psi^2 = a^2} + x^2 \underbrace{\langle B^2 \rangle_\psi}_{= \Delta B_\psi^2 = b^2} + \underbrace{ix \langle AB - BA \rangle_\psi}_{x \underbrace{\langle i[A,B] \rangle_\psi}_{c \in \mathbb{R}\,!}}$$

$$0 \leq a^2 + x^2 b^2 + xc \quad \text{für alle } x!$$

$\lceil C = i\,[A, B]$ hermitesch? $\quad A = A^\dagger,\ B = B^\dagger$

z.z.: $\quad C = C^\dagger$

$$C^\dagger = \left(i\,[A, B] \right)^\dagger = (iAB - iBA)^\dagger$$

$$= -i\,(AB)^\dagger + i\,(BA)^\dagger$$

$$= -i\,(B^\dagger A^\dagger) + i\,A^\dagger B^\dagger = -iBA + iAB$$

$$= i\,[A, B] = C \quad !$$

$\perp$

$$0 \leq a^2 + x^2 b^2 + xc$$

$$= a^2 + b^2 \underbrace{\left(x^2 + 2\frac{c}{2b^2} x \right)}_{\left(x + \frac{c}{2b^2}\right)^2 - \frac{c^2}{4b^4}}$$

$$= a^2 + b^2 \left(x + \frac{c}{2b^2} \right)^2 - \frac{c^2}{4b^2}$$

für $x = \frac{c}{2b^2}$: $\quad 0 \leq a^2 - \frac{c^2}{4b^2} \quad !$

$$a^2 b^2 \geq \frac{c^2}{4}$$

$$\Delta A_\psi^2\, \Delta B_\psi^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle i[A, B] \rangle_\psi \right|^2$$

Spezialfall: Obs. A, B, $[A, B] = 0$!

KWR: $\Delta A_\psi \, \Delta B_\psi \geq 0$!

- für bel. $|\psi\rangle$: $\Delta A_\psi \neq 0$, $\Delta B_\psi \neq 0$ ✓
- $\exists \; |\psi\rangle$: $\Delta A_\psi \, \Delta B_\psi = 0$?

$|\psi\rangle = |a_n\rangle$: EZ von A zum EW a

$\rightarrow \quad \langle A \rangle_{|a_n\rangle} = a_n \,, \quad \Delta A_{|a_n\rangle} = 0$!

- $\exists \; \psi$: $\Delta A_\psi = 0$ und $\Delta B_\psi = 0$? !

<u>Satz</u>: A, B hermitesch

$[A, B] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A, B$ besitzen gemeinsame Eigenbasis $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots$

$$A = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$$[A, B] \overset{!}{=} 0 \quad \Longleftarrow \quad B = \sum_n b_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$\Leftarrow$:
$$A = \sum a_n |a_n\rangle\langle a_n|$$
$$B = \sum b_n |b_n\rangle\langle b_n|$$

- $b_n \neq b_m$ für $n \neq m$:

$$[A,B]=0$$
$$B \underbrace{A|b_n\rangle}_{|v\rangle} = AB|b_n\rangle = A b_n |b_n\rangle$$
$$= b_n \underbrace{A|b_n\rangle}_{|v\rangle}$$

d.h. $|v\rangle = A|b_n\rangle$ ist EV zum EW b_n von B

d.h. $A|b_n\rangle = \lambda|b_n\rangle$

d.h. $|b_n\rangle$ ist EV von A! ∎

- falls $b_n = b_m$ für $n \neq m$ möglich:

$$|a_n\rangle = \sum_{b \in \mathrm{Spec}(B)} |\varphi_b(a_n)\rangle \quad !$$

$\in \mathcal{H}_b \subseteq \mathcal{H}$

$\nearrow$
Eigenraum zu EW b
von B

$$|a_n\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{b \in \mathrm{Spec}(B)} \underbrace{|\varphi_b(a_n)\rangle}_{\in\ \mathcal{H}_b \subseteq \mathcal{H}}$$

$\uparrow$ Eigenraum zu EW b von B

$$0 = (A - a_n)|a_n\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{b \in \mathrm{Spec}(B)} (A - a_n)|\varphi_b(a_n)\rangle$$

$$= \sum_{b \in \mathrm{Spec}(B)} \quad b\,|\varphi_b(a_n)\rangle$$

andererseits: $\quad B(A-a_n)|\varphi_b(a_n)\rangle \overset{[A,B]=0}{=} (A-a_n)\,\underbrace{B|\varphi_b(a_n)\rangle}_{b|\varphi_b(a_n)\rangle}$

$$= b\,(A-a_n)|\varphi_b(a_n)\rangle \rightsquigarrow \{(A-a_n)|\varphi_b(a_n)\rangle\}_{b \in \mathrm{Spec}\,B}$$

sind linear unabhängig!

$\rightsquigarrow$ d.h. $\forall n$: $\quad A|\varphi_b(a_n)\rangle = a_n|\varphi_b(a_n)\rangle$

Vollständigkeit von $\{|a_n\rangle\}_n$ impliziert

Vollständigkeit $\{|\varphi_b(a_n)\rangle\}_{b,n}$!

$\equiv$ gemeinsame Eigenbasis von A und B !