Letzte Vorlesung:

1. Postulat

Zustandsraum $\hat{=}$ unitärer[(*)] Vektorraum $\mathcal{H}$

Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ Zustände können superponiert werden:

$\varphi_1 \,,\; \varphi_2 \qquad\qquad \varphi_1 + \varphi_2$

$\uparrow \,,\; \downarrow \qquad\qquad \uparrow + \downarrow$

(*) d.h. $\mathcal{H}$ komplexer VR ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle$:

- $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle^*$
- $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0 \qquad (\text{für } \varphi \neq 0)$
- $\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \lambda^* \varphi, \psi \rangle$
- $\langle \varphi, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \langle \varphi, \psi_2 \rangle$

Messung M_φ : $\qquad \varphi \in \mathcal{H}, \; |\varphi| = 1$

- positiv ("1") wenn Zustand φ vorliegt
- negativ ("0") wenn Zustand φ nicht vorliegt

Messpostulat (vorläufige Version)

Messung M_φ an System im Zustand ψ

positiv mit Wahrscheinlichkeit

$$p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2 .$$

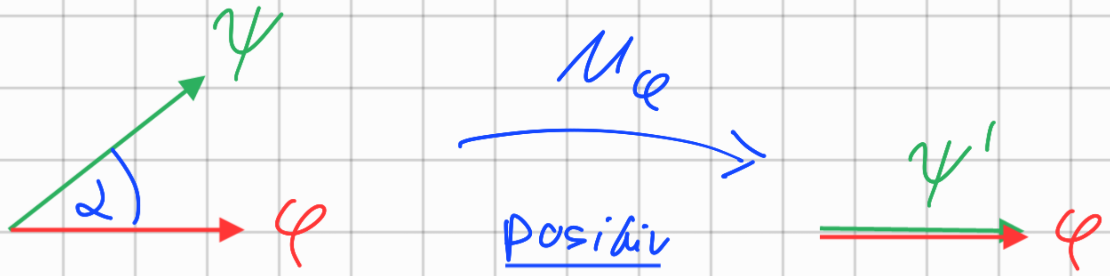
$$\rightarrow \quad p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2 = \cos^2 \alpha \in [0, 1]$$

- $p = 1 \iff \varphi \parallel \psi$
- $p = 0 \iff \varphi \perp \psi$

QM: für $p \in \,]0, 1[$ Ergebnis prinzipiell nicht mit Sicherheit vorhersagbar: Indeterminismus

Zusatz:

Messung M_φ ideal $:\Longleftrightarrow$ nach positivem Ergebnis System im Zustand φ



(„Kollaps der Wellenfunktion“)

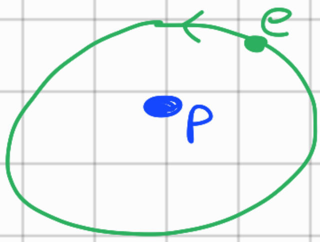
ideale Messung M_φ ermöglicht Präparation des Systems im Zustand φ !

heute: exemplarische Anwendung der Postulate im Stern-Gerlach-Experiment

(Frankfurt 1922) Zweck?

direkten <u>Test</u> der Bohr-Sommerfeldschen

<u>Drehimpulsquantisierung</u> !



$$\rightarrow \quad |\vec{L}| \overset{!}{=} \ell \hbar \qquad \text{(Bohr 1913)}$$

$\hookrightarrow \ell = 1, 2, 3, \ldots$

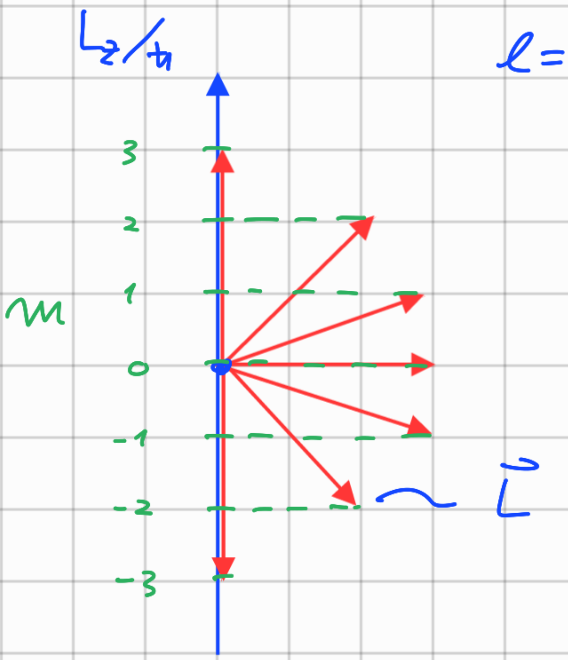
$$L_z \overset{!}{=} m \cdot \hbar \qquad \text{(Sommerfeld 1916)}$$

$\hookrightarrow m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$

$\rightarrow$ Bohrsches Atommodell $\rightarrow$ Spektren

Zeeman-Effekt

$\ell = 3$



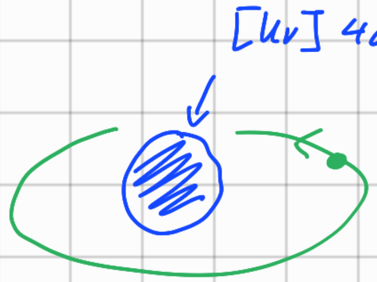
"Richtungsquantisierung"

des Drehimpulses

bzgl. beliebigen Richtungen ??

O. Stern (1916): "Unsinn!"

Experiment an Ag-Atomen: $[Ag] = [Kr]\, 4d^{10}\, \underline{5s^1}$

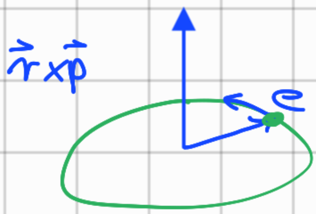


$e: 5s^1 \longleftrightarrow \underline{l = 1}$

(falsche Vorstellung, da Elektron-Spin noch unbekannt !)

Drehimpuls $\vec{L}$ $\longleftrightarrow$ magnetisches Dipolmoment

$$\underline{\vec{\mu}} = \frac{e}{2m_e} \vec{L}$$



$\rightarrow$ $|\vec{L}| = \hbar\, l \longleftrightarrow |\vec{\mu}| = \mu_0\, l$

$L_z = \hbar\, m \longleftrightarrow \mu_z = \mu_0\, m$

d.h. μ_z <u>quantisiert</u>: $-\mu_0, 0, +\mu_0$

$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e}$: Bohrsche Magneton klassische Vorstellung: $\vec{\mu} = \mu_0 \hat{n}$

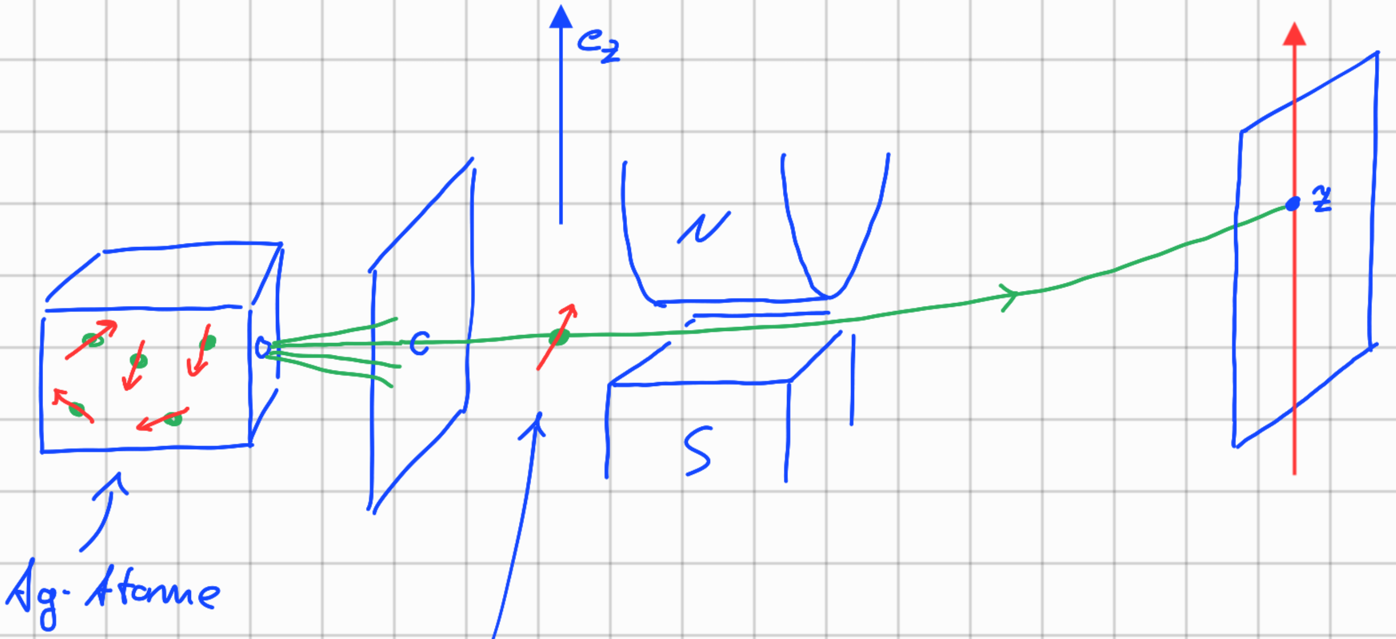
zufällig orientiert

$\hookrightarrow$ μ_z kontinuierlich verteilt:

$$-\mu_0 \leq \mu_z \leq +\mu_0$$

μ_z quantisiert oder kontinuierlich?

$\Rightarrow$ Stern-Gerlach Experiment:

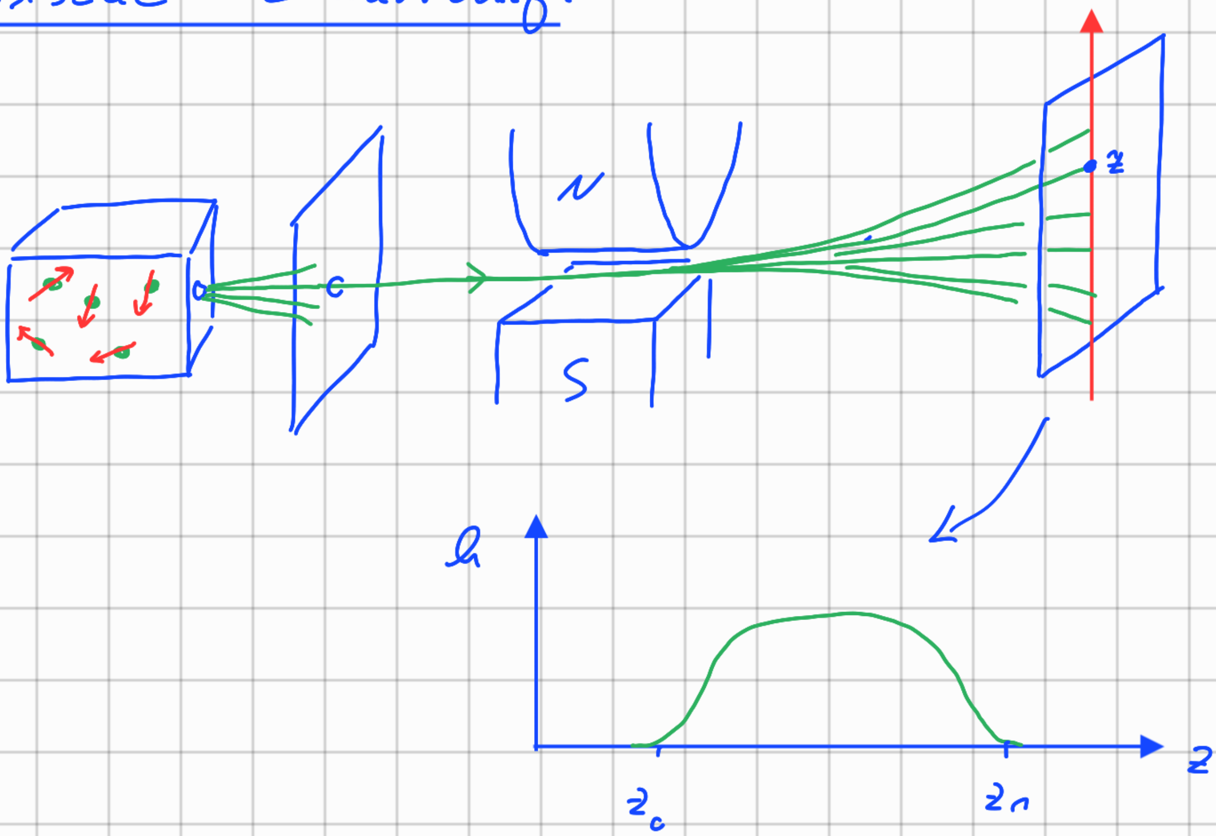


erfährt Kraft im inhomogen $\vec{B}$-Feld:

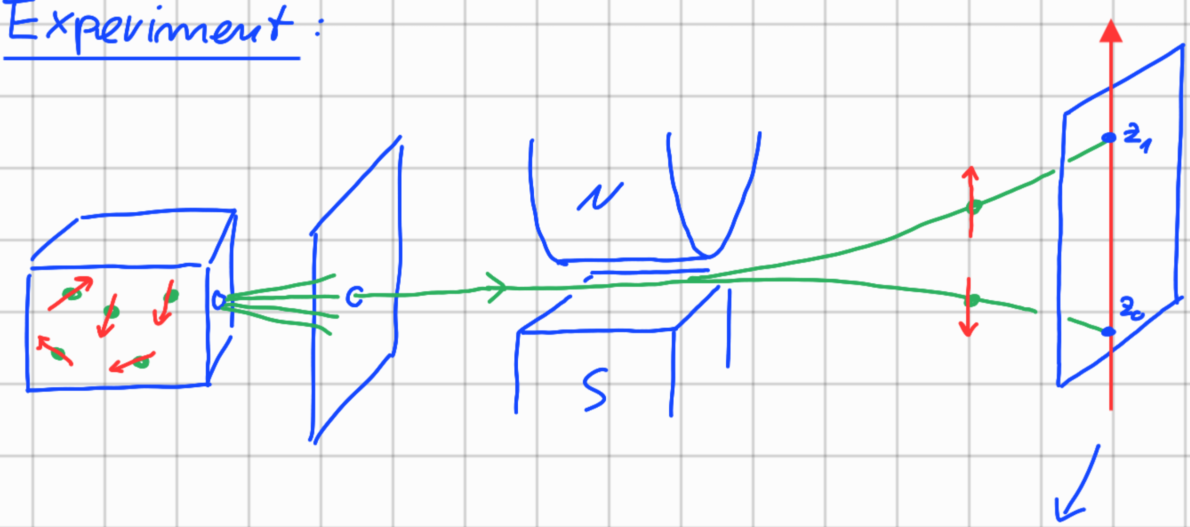
$$\vec{F} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot \mu_z \, \vec{e}_z$$

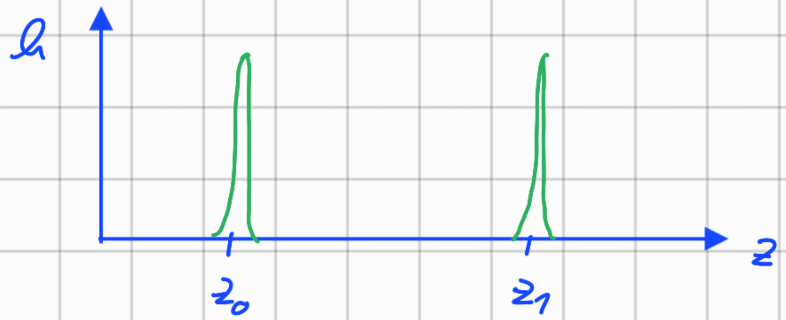
→ Position $\boxed{z \propto \mu_z}$

→ „klassische" Erwartung:

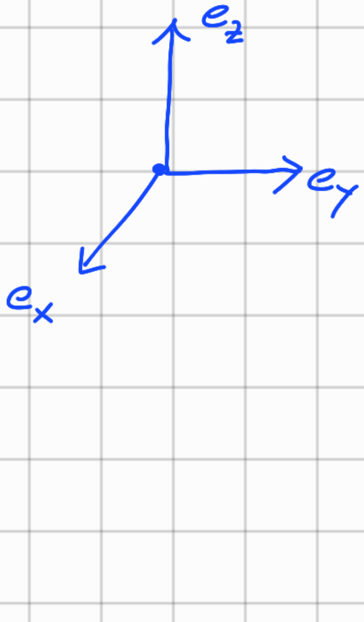


Experiment:



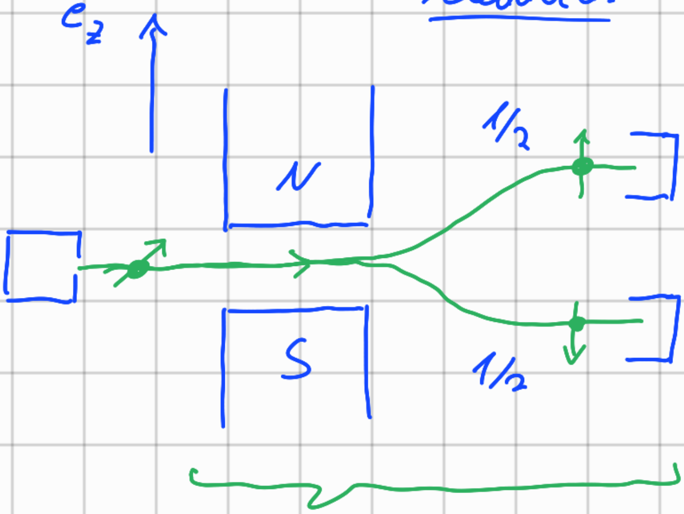


schematisch:



Messwahr-scheinl.

Messergebnisse:



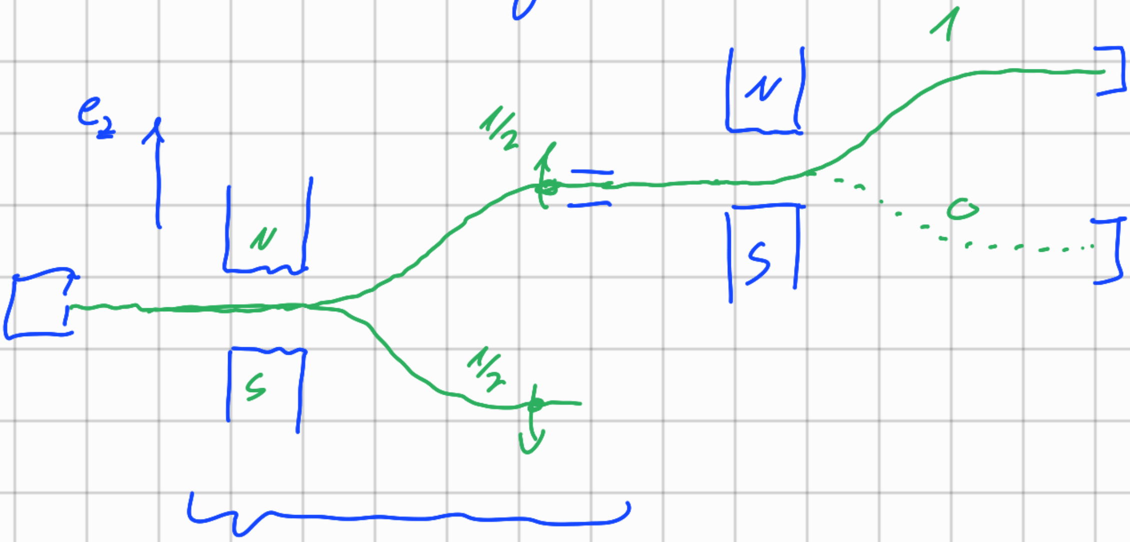
$\mu_z = +\mu_0$

$\mu_z = -\mu_0$

Messgerät für μ_z !

weitere Experimente (schematisch):

1) wiederholte Messungen:

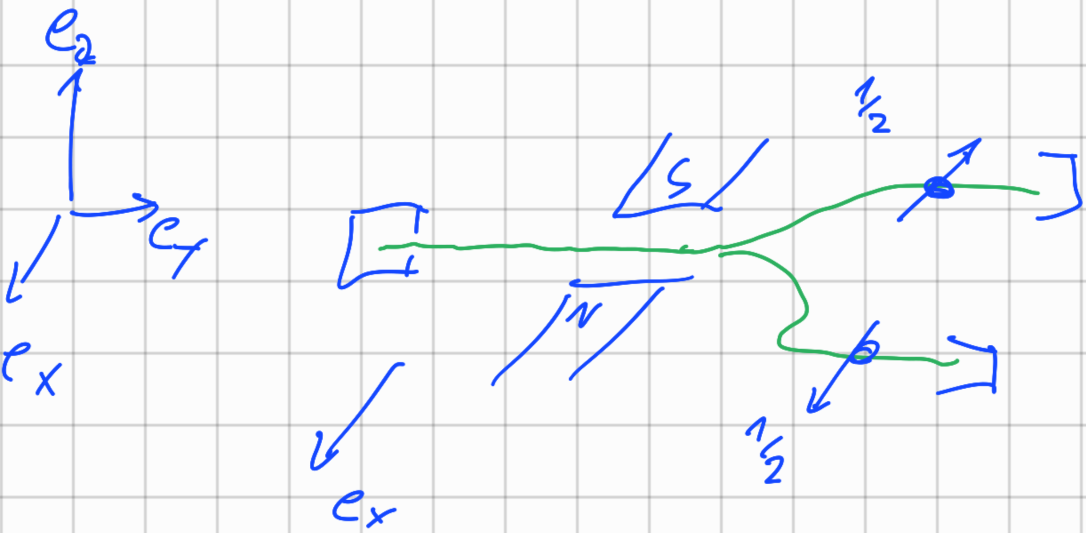


ideales Messgerät für μ_z

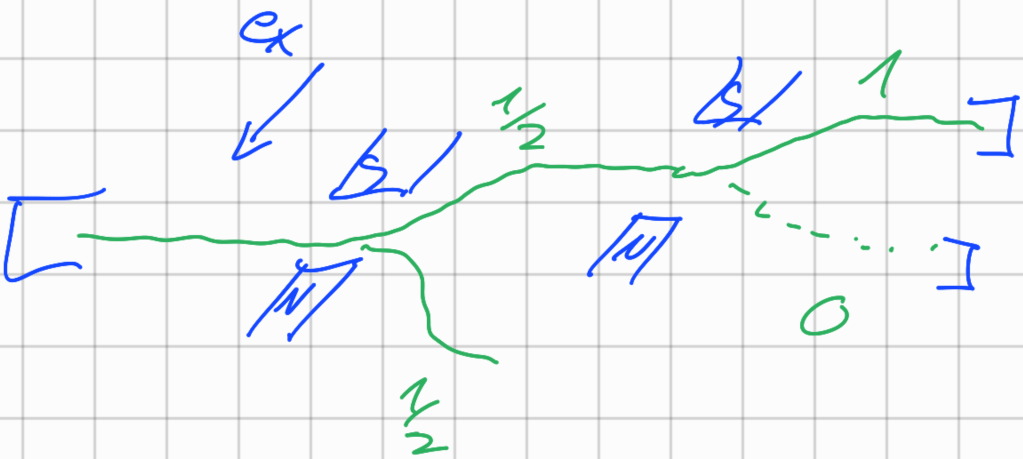
→ wohldefinierte Zustände:

$$\mu_z = +\mu_0, \qquad \mu_z = -\mu_0 \qquad !$$

2) Messung von μ_x

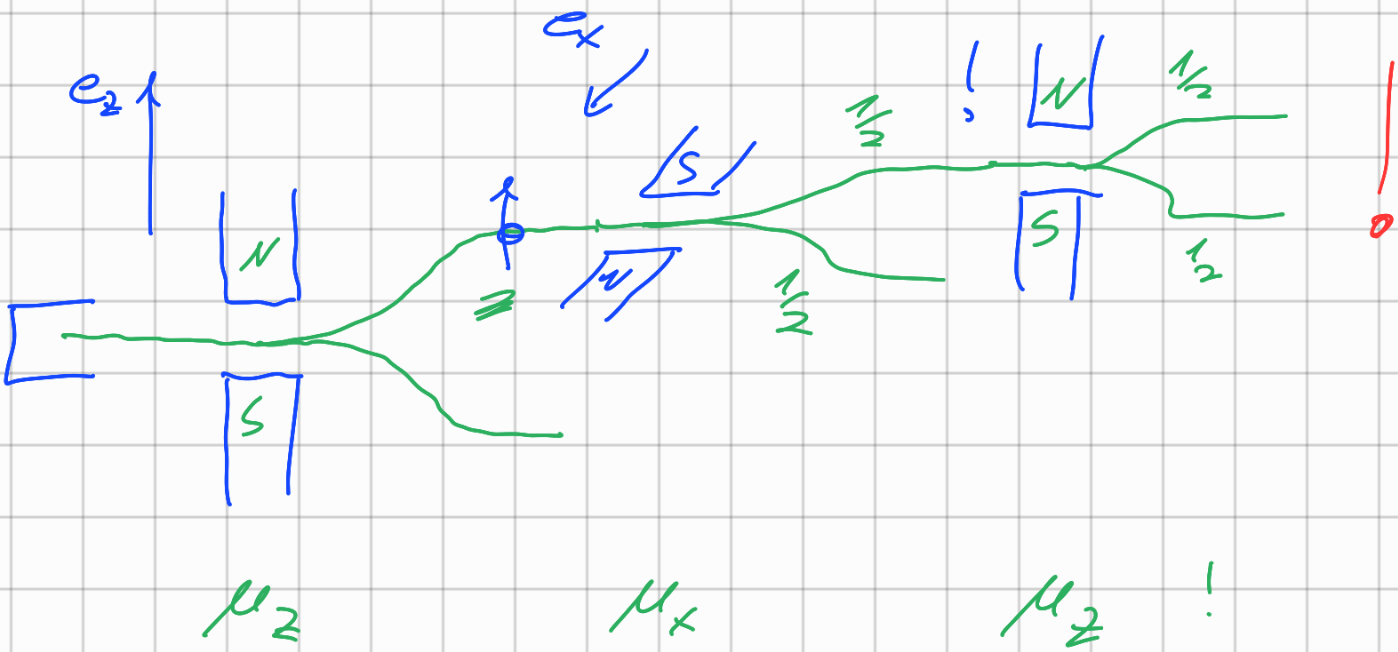


2b) wiederholte Messung:



Zust.: $\mu_x = +\mu_0$, $\mu_x = -\mu_0$

3) Kombination von μ_x und μ_z Messung:



Rotationsinvarianz!

QM-Beschreibung des mag. Moments $\vec{\mu}$

($\hat{=}$ Drehimpuls $\vec{L}$ – Spin $\vec{S}$)

Zustandsraum $\stackrel{!}{=}$ 2-dim. VR $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$

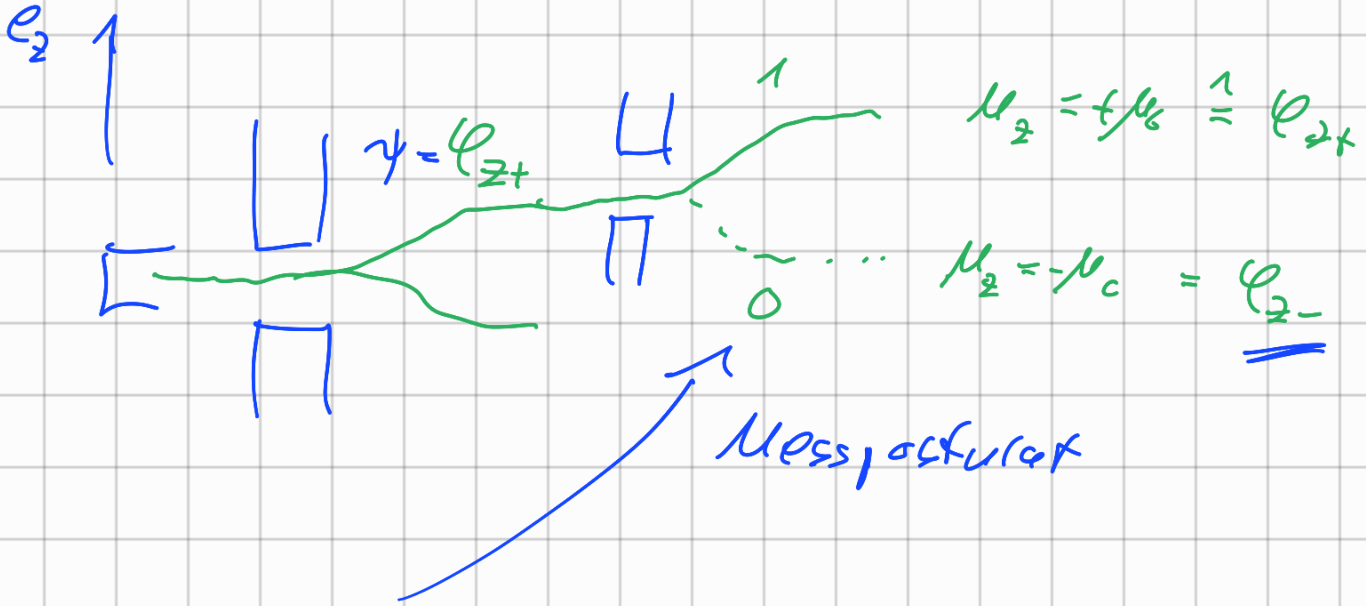
μ_z - Messung:

normiert

Zustand $\mu_z = +\mu_0 \;\hat{=}\; \varphi_{z+} \in \mathcal{H}$

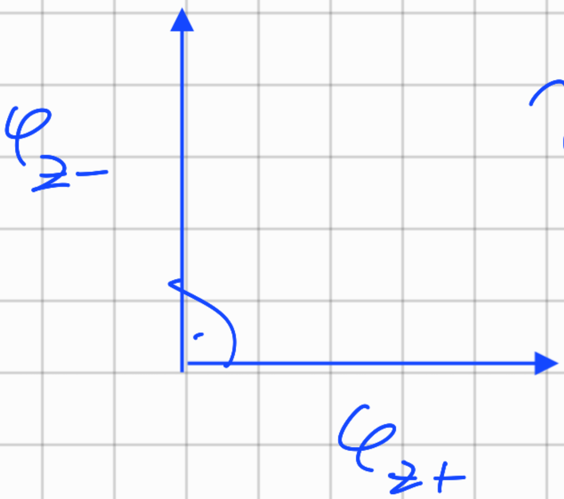
Zustand $\mu_z = -\mu_0 \;\hat{=}\; \varphi_{z-} \in \mathcal{H}$

relative Orientierung φ_{z+} und φ_{z-} ?



$$0 \stackrel{!}{=} P_0 = |\langle \varphi_{z-}, \underset{\psi}{\underset{\shortparallel}{\varphi_{z+}}} \rangle|^2 \rightarrow \langle \varphi_{z-}, \varphi_{z+} \rangle = 0$$

d.h. $\varphi_{z+} \perp \varphi_{z-}$



$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$

- μ_x-Messung: analog:

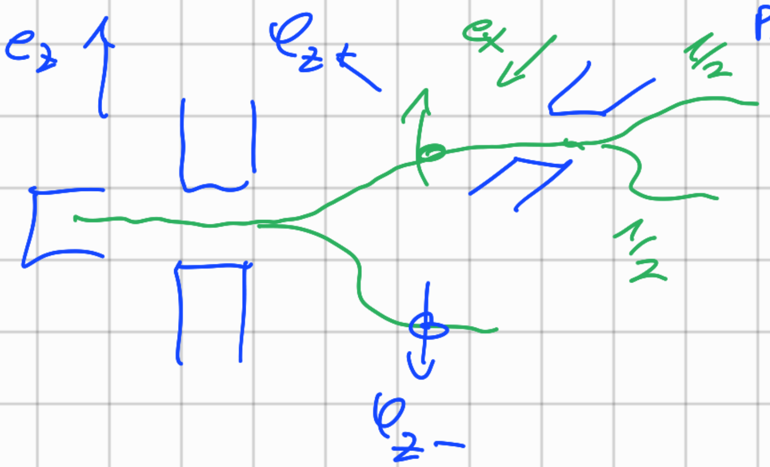
$\rightarrow$ Zustand $\mu_x = +\mu_0$: $\varphi_{x+} \in \mathcal{H}$

" " $\mu_x = -\mu_0$: $\varphi_{x-} \in \mathcal{H}$

$\varphi_{x+} \perp \varphi_{x-}$!

relative Orientierung von $\varphi_{x\pm}$ zu $\varphi_{z\pm}$?

betrachte kombi. Messung:



$\mu_x = +\mu_0 \mathrel{\hat{=}} \varphi_{x+}$

$\mu_x = -\mu_0 = \varphi_{x-}$

Messpostulat:

Exp.

$$P_1 \overset{!}{=} |\langle \varphi_{x+}, \varphi_{z+} \rangle|^2 = 1/2$$

$$P_2 = |\langle \varphi_{x-}, \varphi_{z+} \rangle|^2 = 1/2$$

$$P_3 = |\langle \varphi_{x+}, \varphi_{z-} \rangle|^2 = 1/2$$

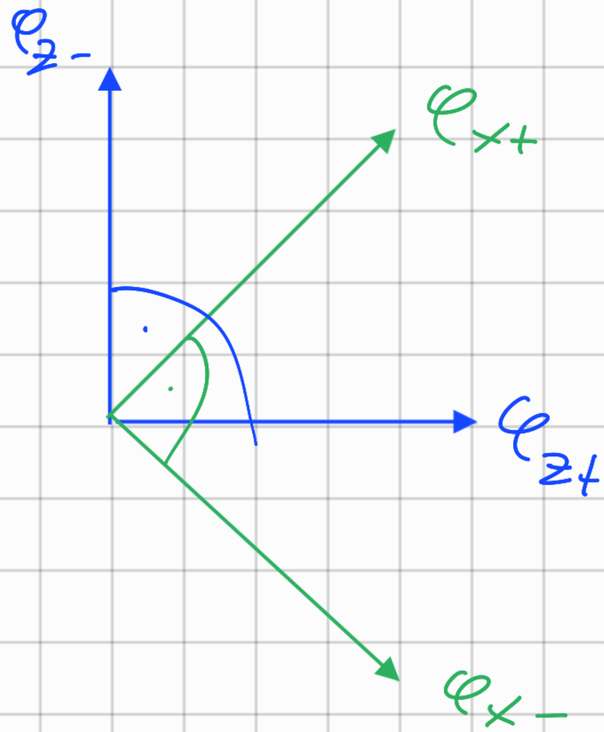
$$P_4 = |\langle \varphi_{x-}, \varphi_{z-} \rangle|^2 = 1/2$$

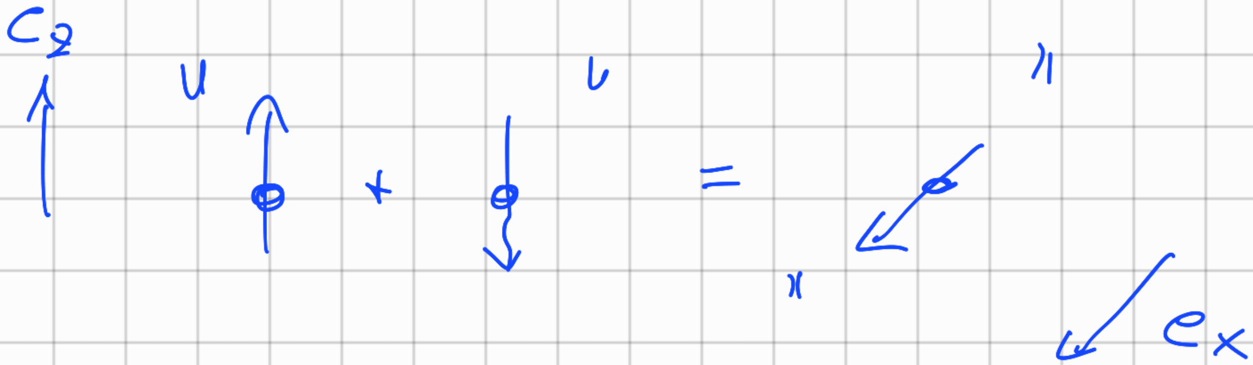
z.B. check:

$$\varphi_{x+} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{z+} + \varphi_{z-} \right)$$

$$\varphi_{x-} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{z-} - \varphi_{z+} \right)$$

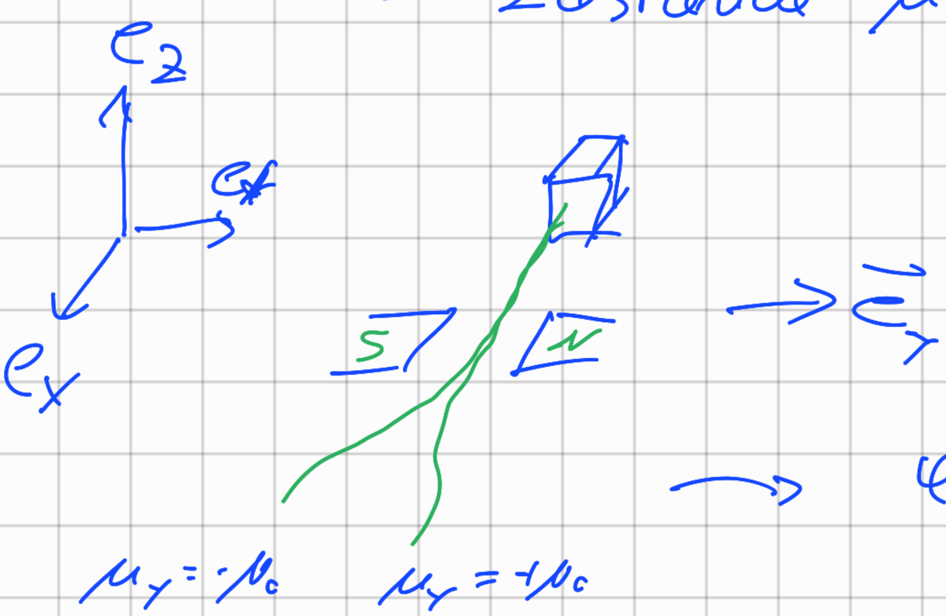
!





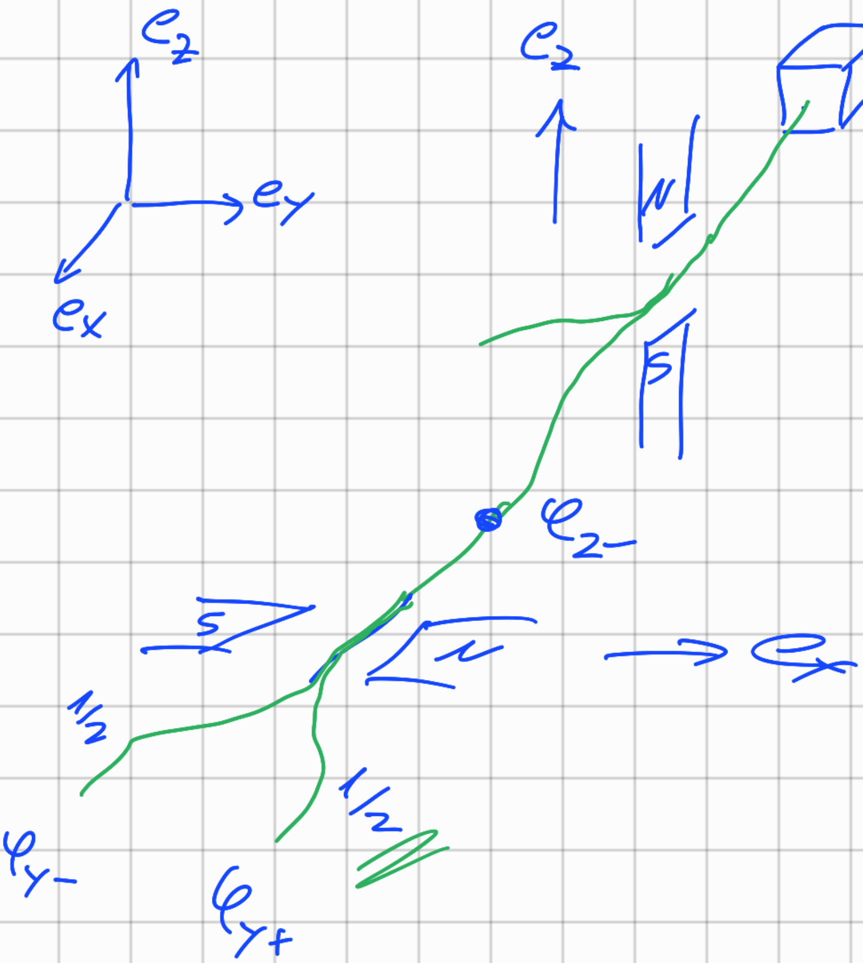
∘ Messung von μ_y ?

$\Rightarrow$ Zustände μ



$\longrightarrow e_{y+} \perp e_{y-}$

Kombi: Messungen: μ_y und μ_z:



$$|\langle \varphi_{y\pm}, \varphi_{z\pm} \rangle|^2 \overset{!}{=} 1/2$$

Kombi.-Messung μ_y und μ_x

analog: $$|\langle \varphi_{y\pm}, \varphi_{x\pm} \rangle|^2 \overset{!}{=} 1/2$$

$$\rightarrow \quad \varphi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + \underline{\underline{i}}\,\varphi_{z-}\right)$$

$$\varphi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} - \underline{\underline{i}}\,\varphi_{z-}\right)$$