letzte Vrlsg.:

- $[J^2, J_3] = 0 \rightarrow$ gemeinsame Eigenzustände $|j, m\rangle$

der Drehimpulsquantenzahlen

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$$

$$\hookrightarrow m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

derart, dass

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_3 |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

Spin 1/2 : $j = s = 1/2, \quad m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$$|z+\rangle \equiv |\uparrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|z-\rangle \equiv |\downarrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \quad \text{etc.}$$

heute: Bahndrehimpuls: Eigenwerte und Eigenfunktion (=: Kugelflächenfunktionen)

$$|j = \ell, m\rangle \longleftrightarrow Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$$

Aufgabe 44:

- $L_3\, \psi(r,\varphi,z) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi(r,\varphi,z)$

- 2π Periodizität: $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$

$\rightarrow$ L_3-Eigenwerte <u>ganzzahlige</u> Vielfache von $\hbar$

d.h. m <u>ganzzahlig</u> $\rightarrow$ $j \equiv l$ <u>ganzzahlig</u>

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

$$m = -l,\ -l+1,\ \dots,\ l-1,\ l$$

Bestimmung der <u>Eigenfunktionen</u> von L^2, L_3

mittels <u>Ortsdarstellung</u>: $\left(\hat{\vec{r}} \rightarrow \vec{r}\ ,\ \hat{\vec{p}} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}\right)$

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \ \hat{=}\ -i\hbar\, \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

j

in <u>Kugelkoordinaten</u> r, ϑ, φ:

- $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi}$

- $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

- $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\vartheta,\ \vec{e}_\varphi$ ONB

- $L_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$

- $L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$

gemeinsame Eigenfunktion zu Eigenwerten

$\underline{\hbar m}$ und $\underline{\hbar^2 \ell(\ell+1)}$ =: Kugelflächenfunktion

$$Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi)$$

genügt somit

$$\boxed{\begin{aligned} L^2\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) &= \hbar^2 \ell(\ell+1)\; Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) \\ L_3\, Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) &= \hbar m\; Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) \end{aligned}}$$

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $\rightsquigarrow$ $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta)\, e^{im\varphi}$

$\underline{\ell = 0}$:

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$\underline{\ell = 1}$:

$$Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\ \cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \sin\vartheta\ e^{\pm i\varphi}$$

$\underline{\ell = 2}$:

$$Y_{2,0} = 3\cos^2\vartheta - 1$$

$$Y_{2,\pm 1} = \sin(2\vartheta)\ e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \sin^2\vartheta\ e^{\pm 2i\varphi}$$

$\vdots$

(bis auf Normierung)

<u>Anwendung</u>: <u>Teilchen im Zentralpotenzial</u>

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + V(|\vec{r}|)}$$

wegen $[L^2, H] = 0$, $[L_3, H] = 0$, $[L^2, L_3] = 0$

gibt es <u>gemeinsame Eigenzustände</u>

$$|E, \ell, m\rangle$$

der Operat. L^2, L_3, H zu Eigenwerten

$$\hbar^2 \ell(\ell+1) \qquad \hbar m \qquad \underline{\underline{E}} \longrightarrow$$

stat. S.Gl. in Kugelkoordinaten mittels :

$$|\vec{p}|^2 = -\hbar^2 \Delta$$

$$= -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \overbrace{- \frac{\hbar^2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}^{\stackrel{!}{=}\ \hat{L}^2/r^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{L}^2}{r^2}$$

d.h.

$$E\,\psi_E(r,\vartheta,\varphi) \stackrel{!}{=} \left(-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \underline{\underline{\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}}} + V(r)\right)\psi_E(r,\vartheta,\varphi)$$

Ansatz :

$$\psi_E(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r}\,u(r)\,\underline{\underline{Y_{l,m}}}(\vartheta,\varphi)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{E\,u(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right)u(r)}$$

stat. S.G. für 1D Teilchen im effektiven Potenzial

$$\boxed{V_{eff,l} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m\,r^2} + V(r)}$$

$\rightarrow$ Eigenwerte $E_{n,l}$ zu Eigenfunktionen

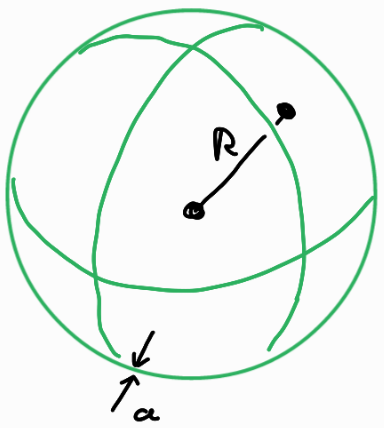
$$\psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{u_n(r)}{r}\, Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$$

$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$

$\hookrightarrow$ $2l+1$ - fache Entartung

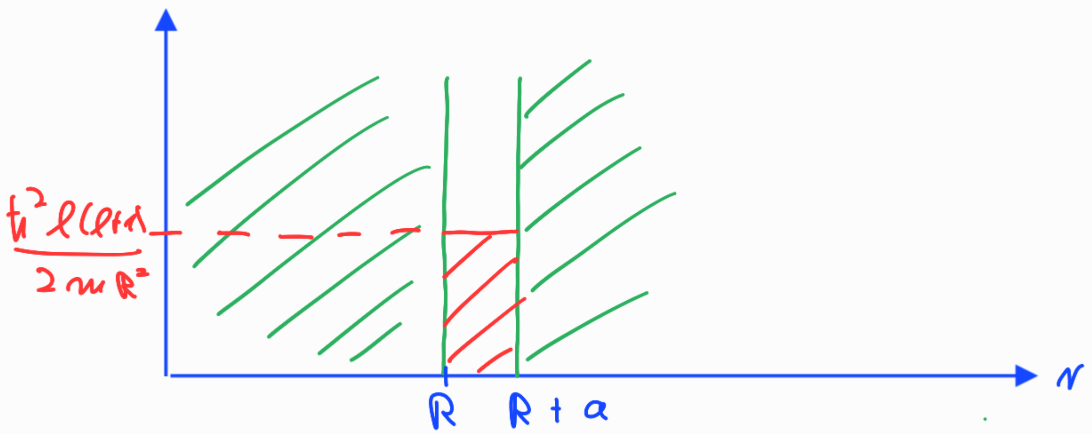
Beispiel: Teilchen auf Kugelschale

Radius R, Dicke $a \ll R$



$$V(r) = \begin{cases} 0 & : \ r \in [R, R+a] \\ \infty & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad V_{eff,l}(r) = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} & : \ r \in [R, R+a] \\ \infty & : \ \text{sonst} \end{cases}$$



$$\rightarrow \quad E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 + \frac{\hbar^2\, l(l+1)}{2mR^2}$$

$(2l+1)$-fach entartet mit Eigenfunkt.en

$$\psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\frac{n\pi}{a}(r-R)}{r}\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$(r \in [R, R+a])$

sonst $= 0$

- q.m. Verschränkung, Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (EPR-Paradoxon) 1935
- „lokal-klassische Theorien", Bell'schen-Ungleichungen 1964!
- q.m. Messung
- Dekohärenz: (QM → „klassische Welt") (Zeh, 1970!)

unbedingt notwendig:

QM eines zusammengesetzten Systems

AB:

A: $\mathcal{H}_A$ mit ONB $|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$

B: $\mathcal{H}_B$ mit ONB $|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle$

$\mathcal{H}_{AB}$ mit

ONB: $\{ |\varphi_i \chi_j\rangle \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

- $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

- $|\varphi_i \chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle|\chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle = \varphi_i \otimes \chi_j$

- $\dim \mathcal{H}_{AB} \overset{!}{=} \dim \mathcal{H}_A \otimes \dim \mathcal{H}_B$

- Tensorprodukt zweier Vektoren:

- Tensorprodukt zweier Vektoren:

$$\mathcal{H}_A \ni |\psi_A\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |\varphi_i\rangle$$

$$\mathcal{H}_B \ni |\psi_B\rangle = \sum_{j=1}^{m} b_j |\chi_j\rangle$$

ONB von $\mathcal{H}_{A/B}$

Def.: $$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

- Skalarprodukt:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

$$|\phi_{AB}\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \psi_{AB} | \phi_{AB} \rangle = \sum_{ij} c_{ij}^* d_{ij} .$$

(Basisunabhängig ? ! !)

Bemerk. zum T. P.:

Mathematik:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B \arrow[r, "\exists\ \varphi = \otimes"] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \arrow[d, "\tilde{h}"] \\
 & V
\end{tikzcd}$$

bilineare Abb.

$$\forall h : \exists \tilde{h} : h \overset{!}{=} \tilde{h} \circ \varphi$$

$$\varphi(|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle) := |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

- Differenzialgeometrie:
  - Kontinuumsmechanik
  - SRT
  - ART

Tensor(feld) n-ter Stufe

$n=0$: $m, q \ \ldots$ $\quad |\psi\rangle$

$n=1$: $\vec{j}, \ \vec{r}, \ \vec{p} \ldots : \ \vec{v}$

$$\vec{v} \xrightarrow{R} \vec{v}\,' = R\vec{v}$$

genau wie $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}\,' = R\vec{r}$

- K. Jänich: Vektoranalysis

- Wikipedia!

wichtig:

kann jeden Vektor $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

als Tensorprodukt

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

geschrieben werden?

Nein!

$$\mathcal{H}_A = \text{Span}\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$$

$$\mathcal{H}_B = \text{Span}\{|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle\}$$

$$\underset{\overset{\Downarrow}{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}}{|\psi_{AB}\rangle} = |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle \overset{?}{\cancel{=}} |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$$

$$= (\alpha_1 |\varphi_1\rangle + \alpha_2 |\varphi_2\rangle) \otimes (\beta_1 |\chi_1\rangle + \beta_2 |\chi_2\rangle)$$

$$= \alpha_1 \beta_1 |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle$$
$$+ \alpha_1 \beta_2 |\varphi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle \rightsquigarrow \alpha_1 = 0 \vee \beta_2 = 0$$
$$+ \alpha_2 \beta_1 |\varphi_2\rangle \otimes |\chi_1\rangle$$
$$+ \alpha_2 \beta_2 |\varphi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle$$

! !

Quantenmechanische Verschränkung (Schrödinger 1935)

Def: ∘ Zustand $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

ist verschränkt g.d.w. sich $|\psi_{AB}\rangle$

nicht als Produkt $|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$

darstellen lässt.

∘ Falls $|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \times |\phi_B\rangle$ dann ist

der Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ separabel !

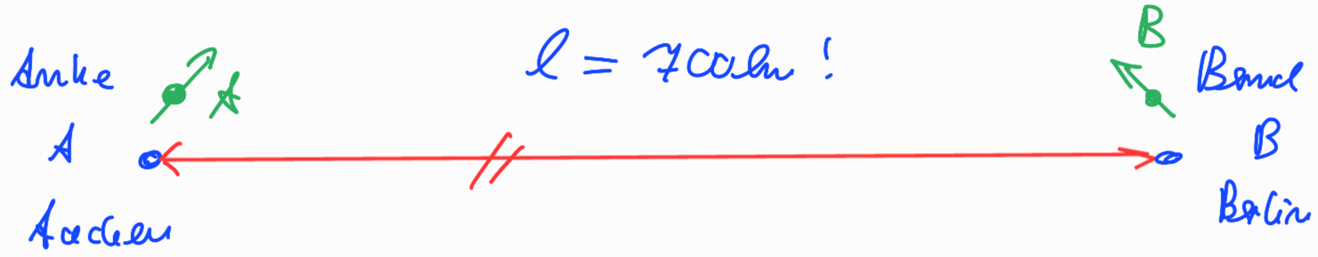
$\Rightarrow$ verschränkter Zust. $|\psi_{AB}\rangle$ mit A und

B in großer räuml. Distanz ist Gegenst.

im

Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (1935)

in Version von D. Bohm (1951):



Spins von A u. B im verschränkten Zustand:

$$|\psi_{AB}\rangle \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \right)$$

betrachte zwei Experimente (I) (II):

(I) Anke misst bei $t=0$ S_3 an ihrem Atom A:

QM: Ergebnis $S_3 = \hbar/2$ oder $S_3 = -\hbar/2$

mit jeweils Wkt. 1/2 !

Annahme: Zustandsvektor $|\psi_{AB}\rangle$

ist vollständige Beschr. des phys. Zustands!

$\longrightarrow$ Indeterminismus ist fundamental!

(II) Anke misst wieder bei $t=0$ S_3

zudem: Bernd misst kurz vorher

bei $t = -\Delta t < 0$, $\Delta t < \ell/c$

S_3 an seinem Arm B :

QM: