Wdhlg.: QM zusammengesetzter Systeme

$$\boxed{\begin{array}{l} AB: \\ \boxed{\begin{array}{l} A:\ \mathcal{H}_A \text{ mit} \\ \text{ONB:} \\ |\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} B:\ \mathcal{H}_B \text{ mit} \\ \text{ONB} \\ |\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle \end{array}} \\ \mathcal{H}_{AB} = \underline{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} \quad \text{mit} \\ \text{ONB} \quad \{|\underline{\varphi_i \chi_j}\rangle\}_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \end{array}}$$

- $|\varphi_i \chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle|\chi_j\rangle = |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \equiv \varphi_i \otimes \chi_j$
- $\dim \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B$
- Tensorprodukt

$$\left.\begin{array}{l} |\psi_A\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle \\ |\psi_B\rangle = \sum_j \beta_j |\chi_j\rangle \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle := \sum_{ij} \alpha_i \beta_j |\varphi_i \chi_j\rangle}$$

i.d.R. $\underset{\in\ \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}{|\phi_{AB}\rangle} \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ für $\underline{\text{alle}}$ $|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle$

→ <u>quantenmech. Verschränkung</u> (Schrödinger 1935)

<u>Def</u>: • Zustand $|\phi_{AB}\rangle$ <u>verschränkt</u> (bzgl. A, B)

g.d.w. $|\phi_{AB}\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ für alle $|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle$

• Zustand $|\psi_{AB}\rangle$ <u>separabel</u> (bzgl. A, B)

g.d.w. $|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$

• $$|\psi_{AB}\rangle = (|\varphi_1\rangle|\chi_1\rangle + |\varphi_2\rangle|\chi_2\rangle)/\sqrt{2}$$

ist verschränkt

• für $\dim \mathcal{H}_A = n$, $\dim \mathcal{H}_B = m \underline{\gg 1}$

ist zufällig gewählter Zustand $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit <u>sehr hoher Wkt.</u> verschränkt !

"Verschränkung ist die Regel,

Separabilität die Ausnahme"

- $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \, |\varphi_i \chi_j\rangle$

  m koeff. $\beta_1, \dots, \beta_m$

  n koeff. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

  n + m koeff.en

- $|\phi_{AB}\rangle = \sum_{ij} c_{ij} \, |\varphi_i \chi_j\rangle$

  n · m koeff. $\begin{matrix} c_{11}, \dots, c_{1m}, \\ \vdots \qquad \vdots \\ c_{n1}, \dots, c_{nm} \end{matrix}$

$n, m \gg 1 \;\rightarrow\; n \cdot m \gg n + m$!

↳ es gilt sogar:

fast alle Zustände von AB sind fast maximal verschränkt!

(Don N. Page, 1993

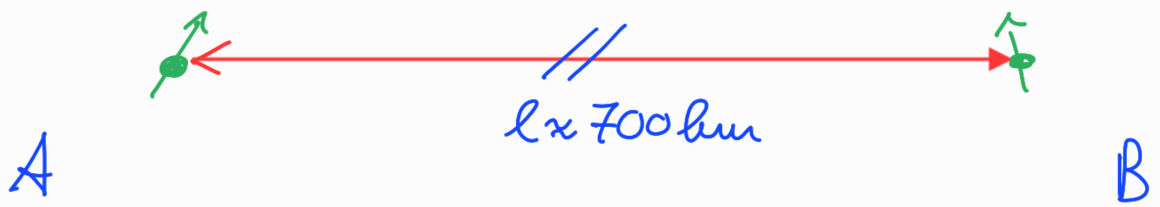
Kontext: Entropie & Temperatur schwarzer Löcher)

Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)-Paradoxon (1935)

mittels verschränkter Spins (D. Bohm) in

großer räumlicher Distanz:

Anke (Aachen) Bernd (Berlin)



z.B.: $$\boxed{|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B\right)}$$

Experiment I

Anke misst $S_3^{(A)}$ zur Zeit $t=0$

→ Ergebnis $\hbar/2$ oder $-\hbar/2$ mit jeweils $p_\pm = 1/2$,

QM: Messergebnis fundamental indeterminiert!

(da $|\psi_{AB}\rangle$ vollständige Zust.-beschreibung)

Experiment II:

Anke misst wieder $S_3^{(A)}$ zur Zeit $t=0$

($\rightarrow$ Ergeb. $\pm\hbar/2$ mit $P_\pm = 1/2$), aber

zudem misst Bernd $S_3^{(B)}$ kurz zuvor

zur Zeit $t = -\Delta t$, $\Delta t < l/c$;

QM: Bernd erhält $\pm\hbar/2$ mit je $P_\pm = 1/2$,

z.B $-\hbar/2$, und schließt das unmittelbar danach

$$|\psi'_{AB}\rangle = |\downarrow\rangle_A \, |\downarrow\rangle_B \qquad (t > -\Delta t)$$

$\rightarrow$ Bernd weiß, das Anke zur Zeit $t=0$ ebenfalls $-\hbar/2$ messen wird!

Einstein, Podolsky, Rosen sagen:

Bernds Messung $S_3^{(B)}$ kann wegen $\Delta t < l/c$ nach SRT keinen Einfluss auf Ankes Messung $S_3^{(A)}$ gehabt haben

$\rightarrow$ Ankes Ergebnis $-\hbar/2$ muss auch schon ohne Bernds Messung festgestanden haben!

D. h.: Der in Exp. I beobachtete Indeterminismus ist <u>nicht</u> fundamental,(*) sondern in der Unvollständigkeit der quant.-mech. Beschreibung begründet. (EPR)

(*) wie von QM behauptet!

<u>Vorschlag</u>:

Es gibt „verborgene Variablen" in einer noch zu findenden „neuen Theorie", die den tatsächlichen Ausgang eines Experiments (z.B. Exp. I) vorher bestimmen (zumindest im Prinzip)!

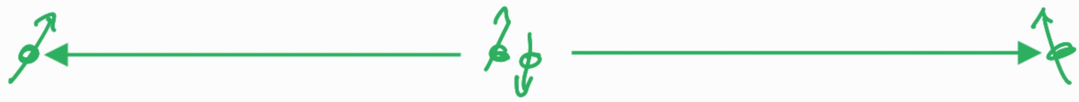
J. S. Bell
1964

<u>quantitative</u> und damit <u>experimentell überprüfbare</u> (!) Aussagen: <u>Bellsche Ungleichungen</u>

Ungleichung Clauser, Horne, Shimony, Holt (CHSH), 1969

experiment. Situation:

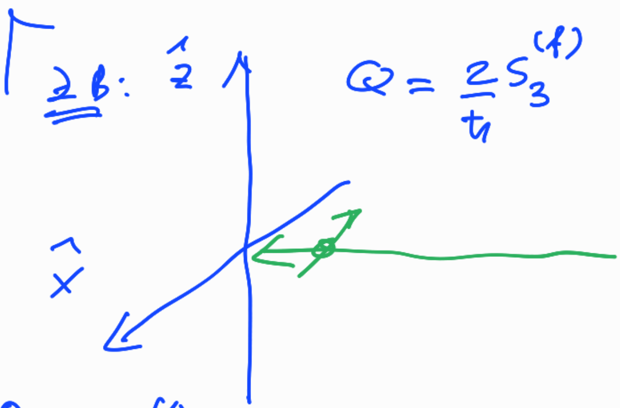
Anke: (Spins) korreliertes System Bernd:



misst entweder Q oder R (zufällige Wahl) mit möglichen Ergebnissen $q = \pm 1$, $r = \pm 1$

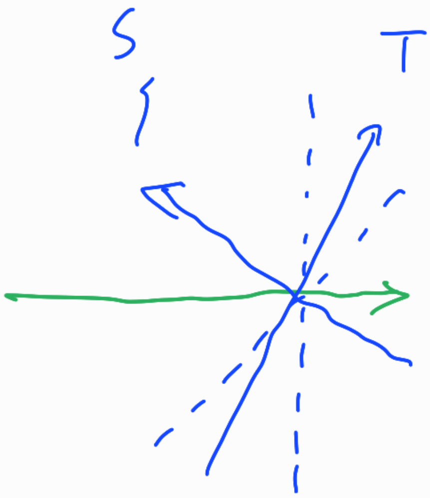
misst entweder S oder T mit mögl. Erg. $s = \pm 1$, $t = \pm 1$

z.B.:



$$Q = \frac{2}{\hbar} S_3^{(A)}$$

$$R = \frac{2}{\hbar} S_1^{(A)}$$



$\longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit:

n	Anke: Messung	Resultat	Bernd: Messung	Resultat
1	R	+1	S	−1
2	R	−1	T	+1
3	Q	+1	T	−1
4	R	−1	S	+1
⋮				

Korrelation: $\overline{RS} = \frac{1}{N_{RS}} \sum_i r_i s_i = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$

$\overline{QS}, \quad \overline{QT}, \quad \overline{RT}$

experimentell bestimmbar! Wozu?

Annahme, dass Messergebnisse gemäß Theorie mit lokalen verborgenen Variablen ausfallen führt auf Bedingung:

$$\mathcal{U} := \boxed{\left| \overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RS} + \overline{RT} \right| \leq 2}$$

CHSH-Ungleichung!

QM: Verletzung der CHSH-Ungleichung in bestimmten Situation möglich:

z.B. für

- Zustand: $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \right)$

- Observable: Anke: $Q = \frac{2}{\hbar} S_3 = \sigma_3$

  $R = \frac{2}{\hbar} S_1 = \sigma_1$

  Bernd: $S = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3)$

  $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3)$

$$M \overset{!}{=} \underbrace{\langle QS\rangle_{\psi_{AB}}}_{1/\sqrt{2}} \ominus \underbrace{\langle QT\rangle_{\psi_{AB}}}_{\ominus 1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RS\rangle_{\psi_{AB}}}_{1/\sqrt{2}} + \underbrace{\langle RT\rangle_{\psi_{AB}}}_{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,!$$

QM: $M \geq 2\sqrt{2}$

CHSH: $M \leq 2$

Experiment:
- Clauser (~1975)

⋮

- Aspect, Dalibard, Roger (1982)

⋮

- (2017)

↪ zunehmende Evidenz für Verletzung der CHSH-Ungleichung in Übereinstimmung mit QM!

⇒ Physik-Nobelpreis 2022:

Clauser, Aspect, Zeilinger

Beweis der CHSH-Ungleichung nach Bell:

Annahme: Theorie lokaler verborgener Variablen:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{R}^n$$

$$Q : \lambda \longmapsto \bar{q}(\lambda) \left(= p_{q=+1}(\lambda) \cdot (+1) + p_{q=-1}(\lambda)(-1) \right)$$

$$R : \lambda \longmapsto \bar{r}(\lambda)$$

$$S : \lambda \longmapsto \bar{s}(\lambda)$$

$$T : \lambda \longmapsto \bar{t}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{Q} \overset{!}{=} \int \bar{q}(\lambda)\, \rho(\lambda)\, d^n\lambda$$

Korrelation:

$$QS : \lambda \longmapsto \overline{qs}(\lambda) \overset{!}{=} \bar{q}(\lambda)\, \bar{s}(\lambda)$$

$$p(q,s;\lambda) \overset{!}{=} p(q,\lambda)\, p(s,\lambda)$$

Lokalität!

stat. Unabhängigkeit!

$$|\overline{QS} - \overline{QT}| = \left| \int d^{\nu}\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{q}(\lambda)\, \bar{s}(\lambda) - \int d^{\nu}\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{q}(\lambda)\, \bar{t}(\lambda) \right|$$

$$= \left| \int d\lambda\, \rho\, (qs - qt) \right|$$

$$= \left| \int d\lambda\, \rho\, (qs - qt \pm qsrt \mp qsrt) \right|$$

$$= \left| \int d\lambda\, \rho\, (qs\, (1 \pm rt)) - \int d\lambda\, \rho\, (qt\, (1 \pm rs)) \right|$$

$$\overset{!}{\leq} \int d\lambda\, \underbrace{|qs|}_{\leq 1}\, \underbrace{(1 \pm rt)\rho}_{\geq 0} + \int d\lambda\, \underbrace{|qt|}_{\leq 1}\, \underbrace{(1 \pm rs)\rho}_{\geq 0}$$

$$\leq \int d\lambda\, (1 \pm rt)\rho + \int d\lambda\, (1 \pm rs)\rho$$

$$= 2 \pm \int d\lambda\, (rt + rs)\rho$$

$$= 2 \pm \left(\overline{RT} + \overline{RS} \right)$$

$$\rightarrow |\overline{QS} - \overline{QT}| \leq 2 - |\overline{RT} + \overline{RS}|$$

d.h. $|\overline{QS} - \overline{QT}| + |\overline{RT} + \overline{RS}| \leq 2$

$$\hookrightarrow |\overline{QS} - \overline{QT} + \overline{RT} + \overline{RS}| \leq 2 \quad !$$

$\blacksquare$