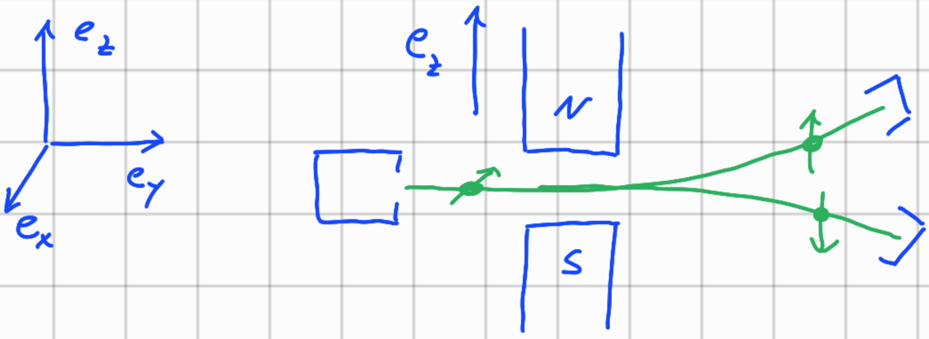
letzte Vorlesung: Stern-Gerlach Experimente



„$+\mu_0$" : Zustand $z+$

„$-\mu_0$" : Zustand $z-$

orthonormale Zustandsvektoren $\varphi_{z+}, \varphi_{z-} \in \mathcal{H}$

analog: Zustände

$x+$: φ_{x+}

$x-$: φ_{x-} $\quad \in \mathcal{H}$

$y+$: φ_{y+}

$y-$: φ_{-}

$\vdots \qquad \vdots$

kombinierte Experimente

$$\leadsto \quad |\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{x\pm}\rangle|^2 = |\langle \varphi_{x\pm}, \varphi_{y\pm}\rangle|^2 = |\langle \varphi_{y\pm}, \varphi_{z\pm}\rangle|^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\leadsto \qquad \varphi_{x\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} \pm \varphi_{z-}\right)$$

$$\varphi_{y\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} \pm i\,\varphi_{z-}\right)$$

⌈ in Komponenten bzgl. ONB $(\varphi_{z+}, \varphi_{z-})$:

$$\varphi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{x\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{y\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ z.B. $\langle \varphi_{y+}, \varphi_{z-} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -i/\sqrt{2}$

etc. ⌋

<u>heute:</u>

- Observablen und Operatoren
- lineare Algebra (Wiederholung)
- Dirac-Notation

(• allg. Messpostulat = 2. Postulat)

Observable = observierbare Variable = beobachtbare Größe

messbare !

Beispiel:

Observable μ_z = z-Komp. des mag. Moments $\vec{\mu}$ eines Ag-Atoms

⇒ messbar mittels St.-Gerl.-Magneten ✓

→ Messwerte: $\mu_z = +\mu_0$, mit Wkt. 1 im Zust. φ_{z+}

$\mu_z = -\mu_0$, " " " " φ_{z-}

allg. Zust. $\psi \in \mathcal{H} = \text{Span}\{\varphi_{z+}, \varphi_{z-}\}$

$+\mu_0$ gemessen mit Wkt. $p_+ = |\langle \varphi_{z+}, \psi \rangle|^2$

$-\mu_0$ " " " $p_- = |\langle \varphi_{z-}, \psi \rangle|^2$

↳ Erwartungswert von μ_z bei Messung an Atomen im Zustand ψ

↳ $\langle \mu_z \rangle_\psi = p_+ \mu_0 + p_- (-\mu_0)$

$$\langle \mu_z \rangle_\psi = \mu_0 \, |\langle \varphi_{z+}, \psi \rangle|^2 - \mu_0 \, |\langle \varphi_{z-}, \psi \rangle|^2$$

analog für μ_Y, μ_X.

extrem hilfreich:

Observable $\longleftrightarrow$ <u>Operator</u> !

<u>Erinnerung</u>:

Operator A auf $\mathcal{H}$ $\hat{=}$ <u>lin. Abb.</u> $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$\varphi \mapsto A\varphi$$

$$A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2$$

$$A(\lambda \varphi) = \lambda (A\varphi)$$

$\hookrightarrow$ vollst. best. durch "Bilder der Basisvektoren"

$\hookrightarrow$ Basis $B = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$

Bilder unter $\underline{A}$: $a_1 = A\varphi_1$, $a_2 = A\varphi_2$, ..., $a_n = A\varphi_n$.

$\rightarrow \psi = \sum_i \psi_i \varphi_i$

$$\rightarrow A\psi = A\Big(\sum_i \underbrace{\psi_i}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\varphi_i}_{\in \mathcal{H}}\Big) = \sum_i \psi_i \underbrace{A\varphi_i}_{a_i} = \sum_i \psi_i a_i$$

→ Abbildungsmatrix des Operators A :

$$\mathcal{H} \ni \underset{\substack{\parallel \\ A\varphi_1}}{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ \dots, \ a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

↳ "Matrix": $A = (a_1, \dots a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\parallel$

"Operator"

↳ $$A\psi = \begin{pmatrix} & \dots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

<u>benötigen:</u>

<u>Projektion auf χ</u> $\in \mathcal{H}$

$|\chi| = 1$

$\rightsquigarrow P_\chi$

d.h. $$\boxed{P_\chi \psi := \langle \chi, \psi \rangle \chi}$$

→ Observable ⟶ Operator

μ_z : Messwerte

↳ $+\mu_0$ mit Wkt. 1 in φ_{z+}

$-\mu_0$ " " " in φ_{z-}

Zustände

Messwerte

$$\hat{\mu}_z := +\mu_0 P_{\varphi_{z+}} + (-\mu_0) P_{\varphi_{z-}}$$

Zustände

$$= \mu_0 \left(P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}} \right)$$

analog:

$$\mu_x \longleftrightarrow \hat{\mu}_x = \mu_0 \left(P_{\varphi_{x+}} - P_{\varphi_{x-}} \right)$$

$$\mu_y \longleftrightarrow \hat{\mu}_y = \mu_0 \left(P_{\varphi_{y+}} - P_{\varphi_{y-}} \right)$$

2↳ Erwartungswert:

$$\boxed{\langle \mu_z \rangle_\psi \overset{!}{=} \langle \psi, \hat{\mu}_z \psi \rangle}$$

⌈

- $\langle \psi, P_\chi \psi \rangle = \langle \psi, \overbrace{\langle \chi, \psi \rangle}^{\in \mathbb{C}} \chi \rangle$

$= \langle \chi, \psi \rangle \langle \psi, \chi \rangle = |\langle \chi, \psi \rangle|^2$ (*)

$$\to \langle \psi, \hat{\mu}_z \psi \rangle = \langle \psi, \mu_0 \left(P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}} \right) \psi \rangle$$

$$= \mu_0 \Big(\underbrace{\langle \psi, P_{\varphi_{z+}} \psi \rangle}_{|\langle \varphi_{z+}, \psi \rangle|^2 \;=\; p_+} - \underbrace{\langle \psi, P_{\varphi_{z-}} \psi \rangle}_{|\langle \varphi_{z-}, \psi \rangle|^2 \;=\; p_-} \Big) \overset{!}{=} \langle \mu_z \rangle_\psi$$

⌋

als Übg.: Matrizen für

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 (P_{\varphi_{x+}} - P_{\varphi_{x-}})$$

$$y \qquad\qquad y \qquad\qquad y$$

$$z \qquad\qquad z \qquad\qquad z$$

sind $\hat{\mu}_x = \mu_0 \sigma_1$, $\hat{\mu}_y = \mu_0 \sigma_2$, $\hat{\mu}_z = \mu_0 \sigma_3$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli-Matrizen

Dirac-Notation, Dualraum, Dualvektor

Dualraum $\mathcal{H}^*$ zu $\mathcal{H}$:= VR der lin. Abb. $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$

(Linearformen)

Isomorphismus: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$

$$\varphi \mapsto \varphi^+ \leftarrow \text{Dualvektor zu } \varphi$$

def. durch:

$$\boxed{\varphi^+ \psi := \langle \varphi, \psi \rangle} \overset{!}{=} \underbrace{\overbrace{(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)}^{1 \times n}}_{\varphi^+} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$\varphi^+ : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{+} = (\varphi_1^{*}, \varphi_2^{*}, \dots, \varphi_n^{*})$$

$$\uparrow$$

($1 \times n$ Abbildungsmatrix für φ^{+})

Anwendung:

$$P_x \psi = \underbrace{\langle x, \psi \rangle}_{x^{+}\psi} x = (\overbrace{x^{+}\psi}^{\in \mathbb{C}}) x$$

$$= x (x^{+} \psi)$$

$$= (x x^{+}) \psi$$

d.h.

$$P_x = x x^{+} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} \cdot \underbrace{(x_1^{*}, x_2^{*}, \dots x_n^{*})}_{1 \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 x_1^{*} & x_1 x_2^{*} & \dots \\ x_2 x_1^{*} & x_2 x_2^{*} & \\ \vdots & & \\ x_n x_1^{*} & \dots & \end{pmatrix} \quad !$$

Dirac-Notation:

Dirac

$\mathcal{H} \ni \varphi \quad \longleftrightarrow \quad |\varphi\rangle$ „ket"

$\mathcal{H}^* \ni \psi^\dagger \quad \longleftrightarrow \quad \langle\psi|$ „bra"

$\langle\psi,\varphi\rangle =: \psi^\dagger \varphi \quad = \quad \langle\psi|\varphi\rangle \overset{!}{=} \langle\psi,\varphi\rangle$

„bra c ket"

Bsp.: $\mathcal{H} \ni \varphi_{z+} \longrightarrow |\varphi_{z+}\rangle = |z+\rangle$

$\varphi_i \longrightarrow |\varphi_i\rangle = |i\rangle$

beachten:

$$(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$$

$$(\lambda\varphi)^\dagger = \lambda^* \varphi^\dagger$$

$$|\varphi + \psi\rangle = |\varphi\rangle + |\psi\rangle$$

$$|\lambda\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$$

$$\langle\varphi + \psi| = \langle\varphi| + \langle\psi|$$

$$\langle\lambda\varphi| = \lambda^*\langle\varphi|$$

Anwendungen / Beispiele:

- $$P_x = x x^+ \overset{\text{Dirac}}{=} \underline{\underline{|x\rangle\langle x|}}$$

$$P_x \varphi = P_x |\varphi\rangle = \underbrace{|x\rangle\langle x|}_{P_x} \varphi\rangle$$

$$= |x\rangle \langle x, \varphi\rangle = \langle x, \varphi\rangle x$$

- $$\hat{\mu}_z = \mu_0 (P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}})$$

$$\overset{\text{Dirac}}{=} \mu_0 (|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-|)$$

$$\rightarrow \quad \hat{\mu}_x = \mu_0 (|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-|)$$

$$|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle \pm |z-\rangle)$$

$$|x\pm\rangle\langle x\pm| = \frac{1}{2}\big(|z+\rangle \pm |z-\rangle \big)\big(\langle z+| \pm \langle z-| \big)$$

$$= \frac{1}{2} (|z+\rangle\langle z+| + |z-\rangle\langle z-| \pm |z+\rangle\langle z-| \pm |z-\rangle\langle z+|)$$

$$\rightarrow \quad \hat{\mu}_x = \mu_0 (|z+\rangle\langle z-| + |z-\rangle\langle z+|)$$

- Spektraldarstellung hermitescher Operatoren
  - Adjunktion: $A \to A^+$ def. durch

$$\langle \varphi, A\psi \rangle \overset{!}{=} \langle A^+\varphi, \psi \rangle$$

$$\to \quad A^+ = (A^*)^T$$

  - Oper. A hermitesch / selbstadjungiert

$$:\Longleftrightarrow \quad A = A^+$$

  - ein herm. Operator A besitzt orthonormale Eigenbasis $B = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, d.h.

$$|\varphi_i\rangle$$

$$A\varphi_i = a_i \varphi_i$$

Eigenvektor zum Eigenwert

  - Eigenwerte hermit. Op.en sind reell!
  - Spektraldarstellung eines herm. Op. A:

$$A = \sum_i a_i P_{\varphi_i} \underset{\text{Dirac}}{=} \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$