Letzte Vorlesung:

messbare Größe

Observable $\longleftrightarrow$ **Operator**

Messwerte

μ_z $\qquad$ $\hat{\mu}_z := \mu_0 P_{\varphi_{z+}} + (-\mu_0) P_{\varphi_{z-}}$

Zustände

$= \mu_0 |z+\rangle\langle z+| - \mu_0 |z-\rangle\langle z-|$

Dirac-Notation

$\rightarrow$ Erwartungswert von μ_z im Zustand ψ

$$\boxed{\langle \mu_z \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle}$$

$$\begin{aligned} &= \mu_0 \langle \psi | z+\rangle\langle z+ | \psi \rangle - \mu_0 \langle \psi | z-\rangle\langle z- | \psi \rangle \\ &= \mu_0 |\langle z+ | \psi \rangle|^2 - \mu_0 |\langle z- | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Dirac-Notation:

$\mathcal{H} \ni \varphi \longleftrightarrow |\varphi\rangle$ "ket"

$\mathcal{H}^* \ni \psi^\dagger \longleftrightarrow \langle \psi |$ "bra"

- $\langle \psi | \varphi \rangle = \psi^\dagger \varphi = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \langle \psi, \varphi \rangle$

- $|\varphi\rangle\langle\psi| = \varphi \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \cdot (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \psi_1^* & \dots & \varphi_1 \psi_n^* \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n \psi_1^* & \dots & \varphi_n \psi_n^* \end{pmatrix}$

- $P_\chi = \chi \chi^\dagger = |\chi\rangle\langle\chi|$

- <u>Spektraldarstellung</u> eines <u>hermiteschen Operators</u> A:

  $(A = A^\dagger)$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_{\varphi_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}}_{B}$$

orthon. <u>Eigenbasis</u>

<u>Eigenwerte</u> (reell)

$$A \, |\varphi_j\rangle = \underbrace{\sum_i a_i \, |\varphi_i\rangle \overbrace{\langle\varphi_i | \varphi_j\rangle}^{= \delta_{ij}}}_{A} = a_j \, |\varphi_j\rangle \quad \checkmark$$

heute: 2. Postulat : Messpostulat

3. Postulat : Dynamik (Schrödingergl.)

2. Postulat (Messung)

(i) Observable A mit möglichen

(*) Messwerten $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$

(**) in Zuständen $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_n\rangle \in \mathcal{H}$

wird beschrieben durch hermiteschen Operator

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

((*) $\hat{=}$ Eigenwerte von A !

(**) $\hat{=}$ Eigenvektoren " ")

(ii) Messung von A an System im Zust. ψ

ergibt Messwert a_i mit Wkt.

$$p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 \qquad \text{(Bornsche Regel)}$$

$\rightsquigarrow$ Erwartungswert von A im Zust. $|\psi\rangle$

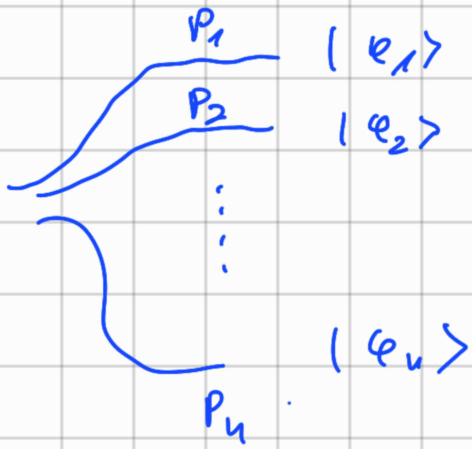
$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

iii) <u>ideale Messung</u>: nach Messung von a_i:

System im Zustand $|\varphi_i\rangle$

$$\sum_i c_i |\varphi_i\rangle = |\psi\rangle$$

$\mathcal{H}$



"reiner" Zustand „Zustands-Gemisch"

Bsp.: <u>Obs.</u> $\mu_z \doteq \mu_0 |z+\rangle\langle z+| - \mu_0 |z-\rangle\langle z-|$

$$|\psi\rangle = \alpha |z+\rangle + \beta |z-\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \mu_z \rangle = \langle \psi | \mu_z | \psi \rangle$$

$$= |\alpha|^2 \mu_0 - |\beta|^2 \mu_0$$

Erwartungswert:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, p_i$$

$$\underset{\text{Born'sche Regel}}{=} \sum_i a_i \, |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$$

$$= \sum_i a_i \, \langle \psi | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{\hat{=} A} \Big) | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A | \psi \rangle .$$

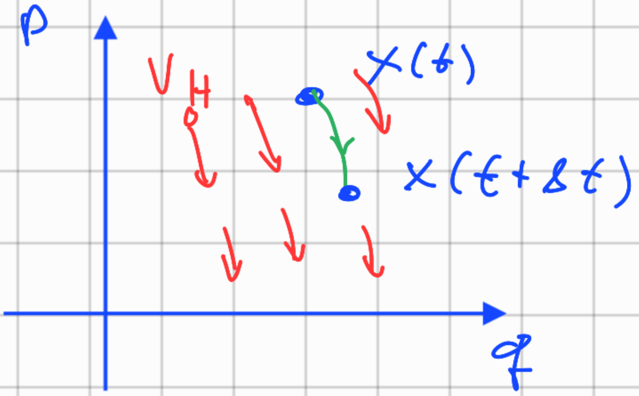
3. Postulat:

zeitliche Entwicklung der Zustände?

$$|\psi(t)\rangle$$

V klassische Mechanik eines kons. Systems nach Hamilton ($\hat{=}$ Newton, Lagrange....)

Zustand $\quad x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \in \Gamma \; (= \mathbb{R}^{2\nu})$



$$x(t) \xrightarrow{\Delta t} x(t+\Delta t)$$

Hamilt. Gleichungen mittels Hamiltonfunktion

$$x \mapsto H(x)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p}(x(t)) \\ -\frac{\partial H}{\partial q}(x(t)) \end{pmatrix}$$

Hamilt. Vf. $\quad V_H(x) = \begin{pmatrix} +\frac{\partial H}{\partial p}(x) \\ -\frac{\partial H}{\partial p}(x) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) \overset{!}{=} V_H(x(t))$$

DGL 1. Ordnung $\quad \xrightarrow[\text{Lsg}]{} \; x(t) \;!$

kl. Observable:

$$A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto A(x)$$

(Bsp.

$$H : \Gamma \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto H(x) = \text{Energie !} \;)$$

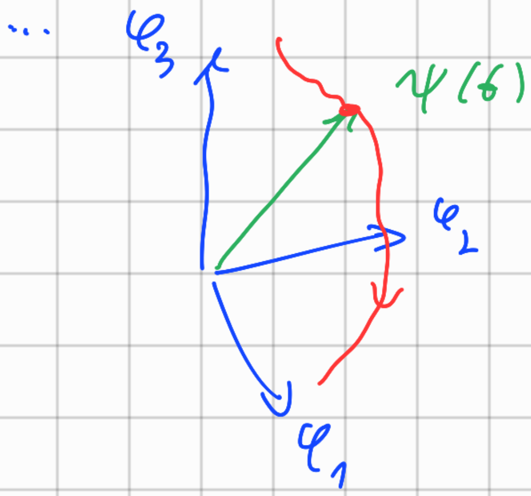
$$\frac{d}{dt} A(x(t)) = \{ H, A(x(t)) \} \quad !$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dt} H = \dot{H} = \{ H, H \} = 0$$

Poisson-Klammer

$$\{ A, B \} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i}$$

Quantenmechanik:



$$|\psi(t)| \overset{!}{=} 1$$

Dynamik:

$$\dot{\psi}(t) \overset{!}{=} f(\psi(t))$$

$$L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

postuliere: f ist linear!

d. h.: $(*)$ $\boxed{\dot{\psi}(t) \overset{!}{=} F\,\psi(t)}$ $\xrightarrow{\text{Lsg.}}$ $\psi(t)$

lineare Operator auf $\mathcal{H}$!

$\rightsquigarrow$ benötigen $|\psi(t)|^2 \overset{!}{=} 1$ für alle t

Lsg. von $(*)$

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}|\psi(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle \psi, \psi \rangle$$

$$= \langle \dot{\psi}, \psi \rangle + \langle \psi, \dot{\psi} \rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \langle F\psi, \psi \rangle + \langle \psi, F\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, F^{+}\psi \rangle + \langle \psi, F\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, (F^{+} + F)\psi \rangle = 0 \; !$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\rightarrow \quad F^{+} + F \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ d. h. $F^{+} = -F$

F anti-hermitesch

zweckmäßig:

$$F := -iH$$

$$\rightarrow \quad \dot{\psi}(t) = \underbrace{-iH}_{=F}\psi(t)$$

$$\text{mit} \quad \left(\begin{array}{ccc} F^{+} & = & -F \\ \| & & \| \\ iH^{+} & = & iH \end{array} \right) \quad H = H^{+}$$

d.h. H hermitescher Operator $=$ Observable!

$\overset{?!}{=}$ Energie!

3. Postulat (Dynamik)

Die zeitliche Entwicklung eines Zustands $\psi(t)$ eines abgeschlossenen Systems (insb. unbeobachtet!) genügt

(Schrödingergleichung)

$$\dot{\psi}(t) = -iH\psi(t)$$

mit hermiteschem Operator H, dem sog. Hamiltonoperator des Systems

Bemerkungen:

- $\left\{\begin{matrix}\text{klassische}\\ \text{q.m.}\end{matrix}\right\}$ Dynamik wird generiert

  durch Hamilton $\left\{\begin{matrix}\text{-funktion}\\ \text{-operator}\end{matrix}\right\}$

- Hamiltonop. H = Energie-Observable!

  ($\longrightarrow$ s.o.)

- Spektraldarstellung von H:

$$H = \sum_{i=0}^{n} E_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

Energie(eigen)zustände

Eigenenergien/Energieniveaus

- Schrödingergl. = allg. lineare Dynamik

- nicht-lineare Dynamik verstößt gegen SRT! $\rightsquigarrow$ Überlichtgeschw.-signale!

  (Simon, Bužek, Gisin, 2001 ...)