

letzte Vorlsg.:

2. Postulat (Messung)

(i) Observable $A \hat{=}$ hermitescher Operator

$$A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$$

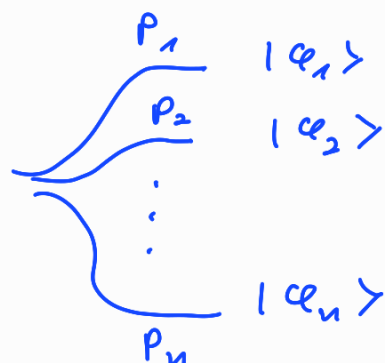
Messwerte $\hat{=}$ Eigenwerte Eigenvektoren

(ii) Messung von A im Zustand $|\psi\rangle$
ergibt a_i mit Wkt.

$$p_i = |\langle \varphi_i | \psi \rangle|^2$$

→ Erwartungswert $\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A | \psi \rangle$

(iii) ideale Messung: nach Messung von a_i
System im Zustand $|\varphi_i\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |\varphi_i\rangle$$


(„collapse der Wellenfkt.“)

Dynamik: linear! $\rightarrow \dot{\psi}(t) = \hat{F} \psi(t)$
lin. Operator

Normerhaltung $\rightarrow \hat{F}^\dagger = -\hat{F}$

d.h. $\hat{F} = -i\hat{H}$ mit herm. Oper. $\hat{H}$!

3. Postulat (Dynamik)

(*) Der Zustand $\psi(t)$ eines abgeschlossenen Systems entwickelt sich gemäß der Schrodinger-Gleichung

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi(t)$$

mit hermiteschen Operator $\hat{H}$, dem Hamiltonoperator des Systems

- (*) insb. "unbeobachtet"
- $\frac{1}{\hbar}$ mit $\hbar = 1,05 \dots 10^{-34} \text{ Js}$, damit

$\hat{H} \equiv \text{Energie in Einheiten "Joule" !}$
(und nicht "1/sekunde")

Hamiltonoperator $H \hat{=}$ Observable Energie ?!

Erhaltungsgröße ?

Erhaltungsgrößen in der QM

Def:

Observable A ist eine Erhaltungsgröße f.d.W.

$\langle A \rangle_{\psi(t)}$ ist konst. für alle

Lsg.en $\psi(t)$ der S.G.G.

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t)$$

Wir zeigen:

$$A \text{ Erhaltungsgröße} \iff HA = AH$$

↑
Operatoren!

im allg.: $AB \neq BA$!

Kommutator zweier Operatoren A und B

$$[A, B] := AB - BA$$

wir zeigen: A Erhaltungssgr. $\Leftrightarrow [H, A] = 0$

" H und A vertauschen/
kommutieren.

generell:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, A] \right\rangle_{\psi(t)} !$$

$$\left(\text{kl. Mech.: } \frac{d}{dt} A(x(t)) = \{H, A\}_{x(t)} \right)$$

Beweis durch einf. Rechnung:

$$\text{S.Gl.: } \dot{\psi}(t) = -iH\psi(t) \quad (t_1 = 1)$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} = \frac{d}{dt} (\langle \psi, A\psi \rangle)$$

$$= \langle \dot{\psi}, A\psi \rangle + \langle \psi, A\dot{\psi} \rangle$$

$$\stackrel{\text{S.Gl.}}{=} \langle \underbrace{(-iH)\psi}_{\uparrow}, A\psi \rangle + \langle \psi, A(-iH)\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, iHA\psi \rangle + \langle \psi, -iAH\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, i(HA - AH)\psi \rangle$$

$$= \langle \psi, \underbrace{i[H, A]}_{\text{}} \psi \rangle = \langle i[H, A] \rangle_{\psi}$$

■

inbes.: $[H, A] = 0 \Leftrightarrow A$ Erhaltungsgröße!

trivialerweise: $[H, H] = 0!$

$\rightarrow$ H Erhaltungsgröße in jedem abgesch.
System!

$\rightarrow$ mit Energie-Observable $:= H$ also

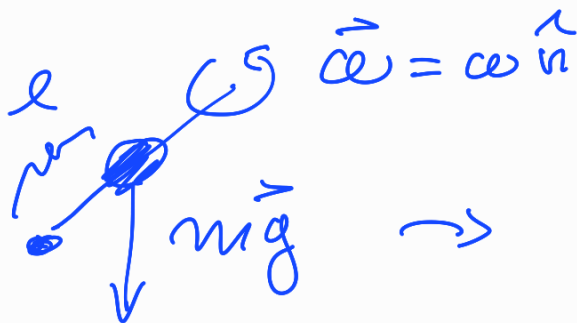
Energieerhaltung in jedem System!

Dynamik eines Spins im Magnetfeld

$\rightarrow$ Larmorp Präzession

↑

kl. Mech: Präzession eines sym. Kreisel(s):



$$\vec{M} = -m l \vec{g} \times \vec{n}!$$
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

└

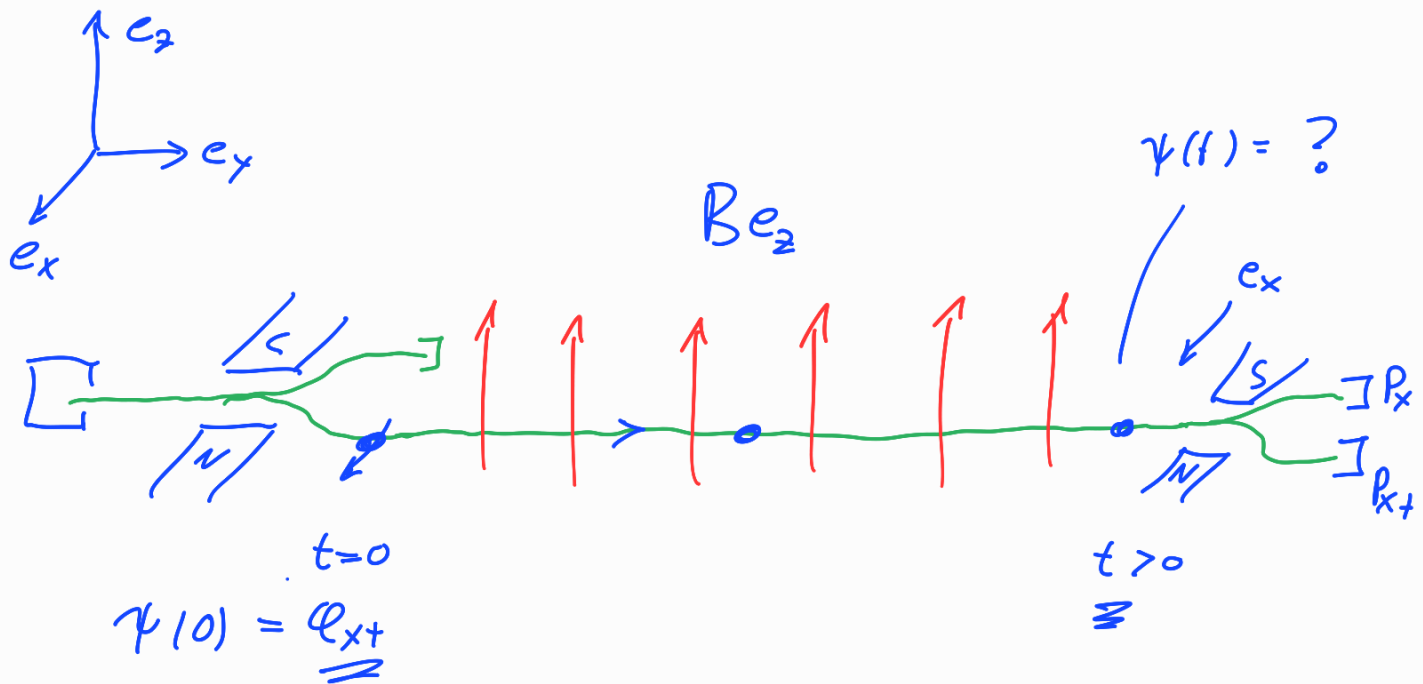
Spin im B-Feld:

$$\vec{\mu} = \vec{B} \times \vec{\mu}$$



Magnet Moment $\vec{\mu} \parallel \vec{L}$

2-stufiges Stern-Gerlach-Experiment:



Hamiltonoperator:

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

Energie eines mag. Moments $\vec{\mu}$ im B-Feld:

$$E = -\vec{B} \cdot \vec{\mu} = -B \mu_z$$

$$\rightarrow H = -B \hat{\mu}_z = -B \mu_0 \sigma_3$$

(Aufg. 4)

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow H = - B \mu_0 \sigma_3$$

$\rightarrow$ S.Gl:

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{i}{\hbar} H \psi(t)$$

$$\dot{\psi}(t) = + i \underbrace{\frac{B \mu_0}{\hbar}}_{\omega} \sigma_3 \psi(t)$$

S.Gl.

$$\dot{\psi}(t) = i \omega \sigma_3 \psi(t)$$



Lsg $\psi(t)$ zum Anfangswert $\psi(0)$ bei $t=0$:

$\rightarrow$ lin DGL. 1. Ord:

$$\dot{y} = 2y$$



$$y(t) = e^{2t} y(0)$$

$$\psi(t) = \underline{e^{i\omega t \sigma_3}} \psi(0) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\omega t \sigma_3} = \cos(\omega t) \mathbb{1} + i \sigma_3 \sin(\omega t)$$

Aufg. 5

$$= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$e^{i\omega t \sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

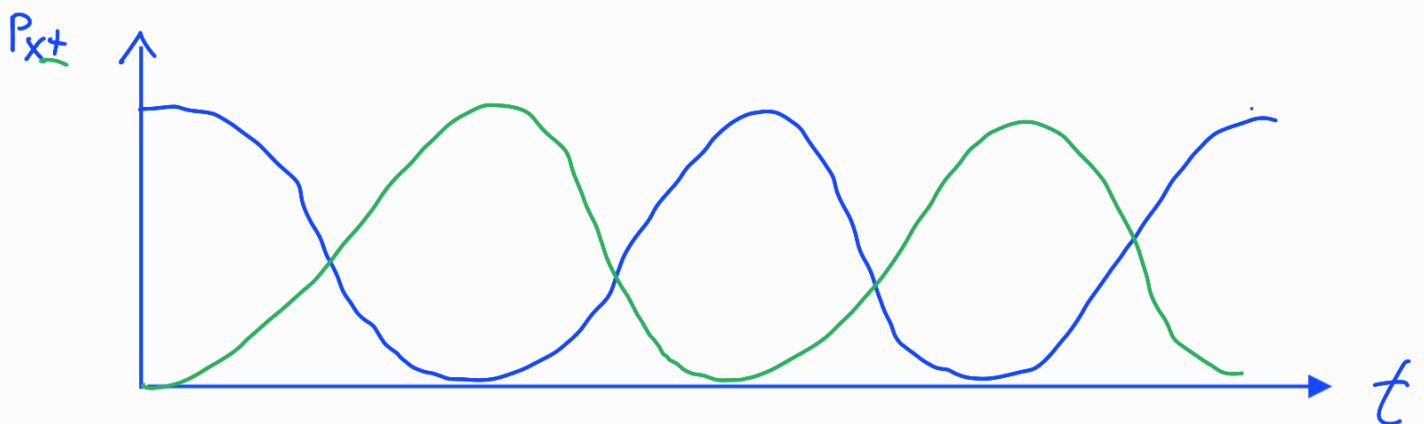
$$\rightarrow \psi(t) = e^{i\omega t \sigma_3} \psi(0)$$

$$\text{here, } \psi(0) = \psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \psi(t) = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P_{x+} = \left| \left\langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\psi_{x+}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}}_{\psi(t)} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \underbrace{|e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}|^2}_{2 \cos^2 \omega t}$$

$$P_{x+}(t) = \cos^2 \omega t, \quad P_{x-}(t) = \sin^2 \omega t$$



$$\begin{aligned} \langle \mu_x \rangle_{\psi(t)} &= \mu_0 (P_{x+}(t) - P_{x-}(t)) = \mu_0 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \\ &= \mu_0 \cos(2\omega t) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\langle \mu_y \rangle}_{\mu_0 \sigma_2} \psi(t) = \mu_0 \langle \psi, \sigma_2 \psi \rangle = \frac{\mu_0}{2} \left\langle \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -ie^{-i\omega t} \\ ie^{+i\omega t} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \left(-ie^{-i2\omega t} + ie^{+i2\omega t} \right)$$

$$= -\mu_0 \sin(2\omega t)$$

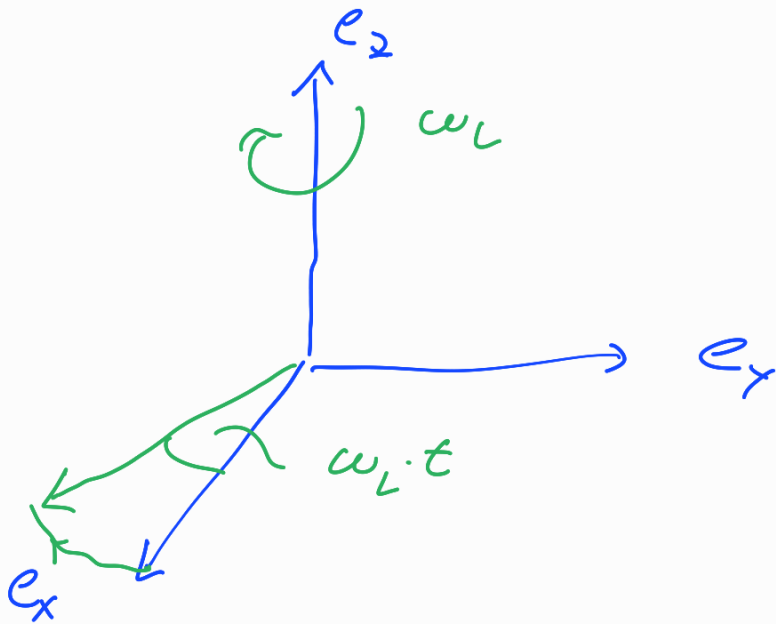
$$\langle \mu_z \rangle_{\psi(t)} \stackrel{!}{=} \langle \mu_z \rangle_{\psi(0)} = \langle \mu_z \rangle_{\psi(t)} = 0 !$$

$$[H, \mu_z] = [-B\mu_z, \mu_z] = 0$$

d.h. μ_z Erhaltungssgröße!

$$\langle \vec{\mu} \rangle_{\psi(t)} = \begin{pmatrix} \langle \mu_x \rangle \\ \langle \mu_y \rangle \\ \langle \mu_z \rangle \end{pmatrix}_{\psi(t)} = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos 2\omega t \\ -\sin 2\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Larmorpräzession mit $\omega_L = 2\omega = \frac{2B\mu_0}{\hbar}$



Zeitentwicklungsoperator

S. Gl.: $\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t)$

$\Rightarrow$ Lsg $\psi(t)$ zum A.W. $\psi(0)$ bei $t=0$:

$$\psi(t) = \underbrace{e^{-\frac{iH}{\hbar}t}}_{\equiv U(t)} \psi(0)$$

Zeitentwicklungsoperator:

$$U(t) := e^{-iHt/\hbar}$$

Eigenschaften:

$$\bullet \quad \psi(0) \xrightarrow{U(t)} \psi(t) = U(t) \psi(0)$$

$$\bullet \quad U(t) = e^{-iHt/\hbar}, \quad U(0) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \dot{U}(t) = -\frac{i}{\hbar} H U(t) \quad (*)$$

$U(t)$ Lsg von $(*)$ zum A.w. $U(0) = \mathbb{1}$.

