letzte Vorlesung:

A Erhaltungsgröße

$:\Leftrightarrow \quad \langle A \rangle_{\psi(t)}$ konstant für alle Lsg.en $\psi(t)$ der S.Gl.

$$\Leftrightarrow \quad [H, A] \overset{!}{=} 0$$

genauer:

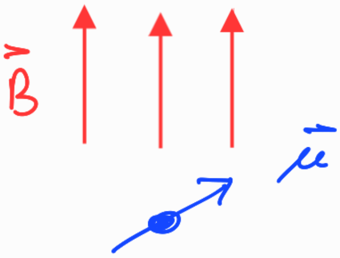
$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, A] \right\rangle_{\psi(t)}$$

- $[H, H] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad H \overset{!}{=}$ Energie ist immer konstant!

⌈ vgl. Hamilt. Mech. • $\frac{d}{dt} A(x(t)) = \{H, A\}$

- $\{H, H\} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad H = E$ Erhaltungsgröße ⌋

Spin im Magnetfeld: Larmorpräzession



$$H = -B\hat{\mu}_z = -B\mu_0\sigma_3$$

$$\to \text{S.Gl.:} \quad \dot{\psi}(t) = i\,\omega\,\sigma_3\,\psi(t)$$

$$L = B\mu_0/\hbar$$

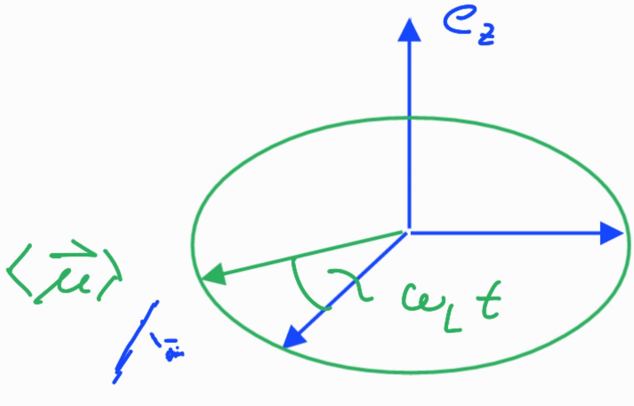
$\to$ Lsg. zum AW $\psi(0)$ bei $t=0$:

$$\psi(\underline{t}) = e^{i\omega \underline{t}\sigma_3}\,\psi(0)$$

$$= \left(\cos(\omega t)\,\mathbb{1} + i\,\sigma_3 \sin(\omega t)\right)\psi(0)$$

für $\psi(0) = \varphi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

$$\langle\vec{\mu}\rangle_{\psi(t)} = \mu_0\begin{pmatrix}\cos\omega_L t\\ -\sin\omega_L t\\ 0\end{pmatrix}$$



$$\omega_L = 2\omega = 2B\mu/\hbar$$

Zeitentwicklungsoperator

S.Gl.: $\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t)$

$\rightsquigarrow$ Lsg. $\psi(t)$ zum A.W. $\psi(0)$ bei $t=0$

$$\psi(t) = \boxed{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}\, \psi(0)$$

$$\downarrow$$

Zeitentwicklungsoperator:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

$$\psi(0) \xmapsto{U(t)} \psi(t) = U(t)\,\psi(0)$$

Eigenschaften:

- $U(t)$ ist Lsg. der DGL

$$\dot{U}(t) = -\frac{i}{\hbar} H\, U(t)$$

zum A.W. $U(0) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ bei $t=0$

$(\hbar = 1)$

- $$\underline{U(t_1)\,U(t_2)} = e^{-iHt_1}\, e^{-iHt_2} = e^{-iH(t_1+t_2)} = \underline{U(t_1+t_2)}$$

$$\begin{tikzcd} \psi(0) \arrow[r, "U(t_1)"] \arrow[rr, bend right, "U(t_1+t_2)"'] & \psi(t_1) \arrow[r, "U(t_2)"] & \psi(t_1+t_2) \end{tikzcd}$$

$$\boxed{U(t_1)\,U(t_2) = U(t_1+t_2)}$$

$$\downarrow$$

- $$U(t)\,U(-t) = U(0) = \mathbb{1}$$

$$\longrightarrow \quad U(t)^{-1} = U(-t)$$

- $$\underline{U(t)^\dagger} = \left(e^{-iHt}\right)^\dagger = e^{(-iHt)^\dagger} = e^{+iHt} = e^{-iH(-t)} = U(-t) = \underline{U(t)^{-1}}$$

d.h. $\boxed{U(t) \text{ unitär}}$

⌈ U unitär $\iff U U^\dagger = \mathbb{1}$

$\iff \langle \varphi, \psi \rangle = \langle U\varphi, U\psi \rangle$ ⌋

- <u>Spektraldarstellung</u> (= Energiedarstellung)

$$H = \sum_{n=0}^{N} E_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

E_n: Eigenenergie / Energieniveau

$|\varphi_n\rangle$: Energieeigenzust.

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \mathcal{U}(t) = \sum_{n=0}^{N} e^{-iE_nt/\hbar} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega_n t} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

$\omega_n := E_n/\hbar$

$$\rightarrow \quad \mathcal{U}(t)|\varphi_\ell\rangle = e^{-i\omega_\ell t}|\varphi_\ell\rangle$$

Phasenverschiebung $1 \xrightarrow{t} e^{-i\omega_\ell t}$

<u>eines</u> Energieeinzustandes $|\varphi_\ell\rangle$ ist

unbeobachtbar!

$$\langle A\rangle_{|\varphi_\ell\rangle} \xrightarrow{t} \langle A\rangle_{e^{-i\omega_\ell t}|\varphi_\ell\rangle} = \langle e^{-i\omega_\ell t}\varphi_\ell|A|e^{-i\omega_\ell t}\varphi_\ell\rangle$$

$$= \langle\varphi_\ell|A|\varphi_\ell\rangle = \langle A\rangle_{|\varphi_\ell\rangle}$$

Die Erwartungswerte <u>aller</u> Observablen bzgl. eines Energieeigenzustandes sind immer konstant!

$$\text{Energieeigenzustand} \overset{!}{=} \text{stat. Zustand}$$

<u>dynamische Zustände</u> ?

$\rightarrow$ durch Superposition von Energieeigenzuständen!

einfachster Fall:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_n\rangle + |\varphi_m\rangle\right), \quad \begin{array}{l} n \neq m \\ E_n \neq E_m \end{array}$$

$$\xrightarrow{t} \underbrace{U|\psi(0)\rangle}_{|\psi(t)\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_n t}|\varphi_n\rangle + e^{-i\omega_m t}|\varphi_m\rangle\right)$$

$$= \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_n\rangle + e^{\Delta\omega t}|\varphi_m\rangle\right)$$

mit $\Delta\omega = \omega_n - \omega_m = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$

$\hookrightarrow \langle A\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle =$

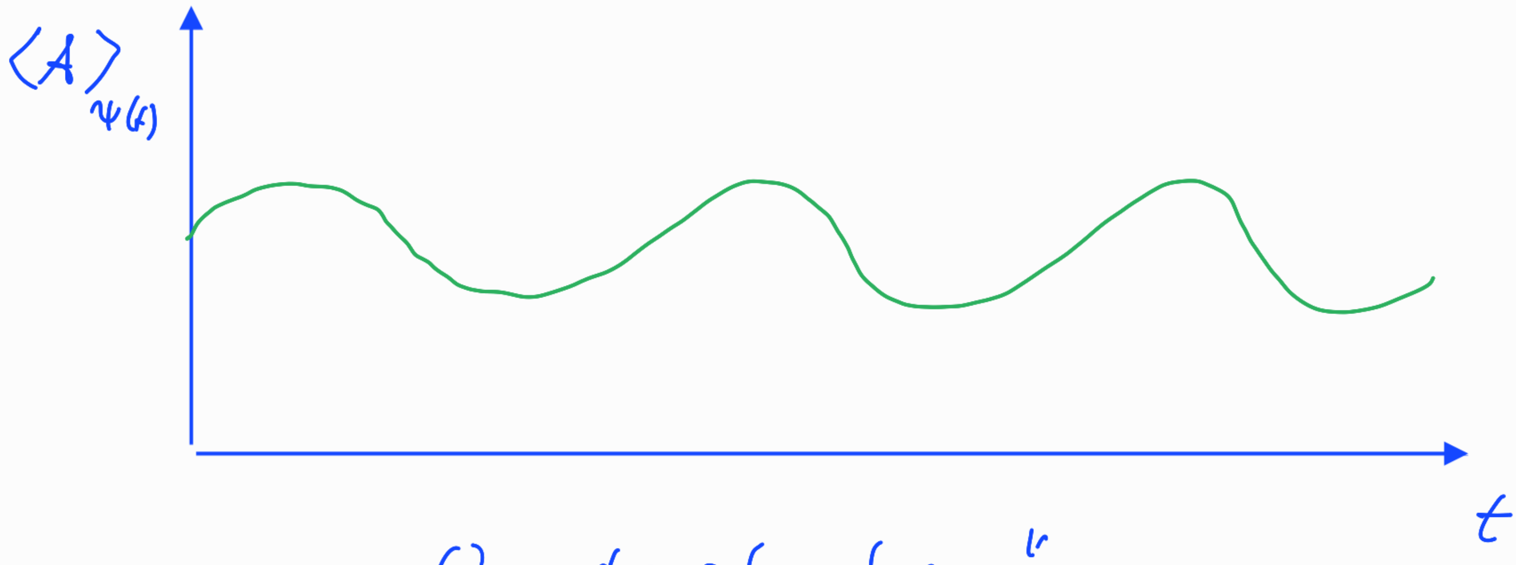
$$\rightarrow \langle A \rangle_{\psi(t)} = \frac{1}{2} \langle \varphi_n + \underline{e^{i\Delta\omega t}} \varphi_m | A | \varphi_n + \underline{e^{i\Delta\omega t}} \varphi_m \rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \langle A \rangle_{\varphi_n}}_{= a_n} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle A \rangle_{\varphi_m}}_{= a_m} + \overbrace{\langle \varphi_n | A | \varphi_m \rangle}^{b_{nm} e^{i\vartheta}} e^{i\Delta\omega t} + \langle \varphi_m | A | \varphi_n \rangle e^{-i\Delta\omega t}$$

$$\rightarrow \boxed{\langle A \rangle_{\psi(t)} = \frac{a_n + a_m}{2} + 2 b_{nm} \cos(\Delta\omega t \pm \vartheta)}$$

$$\Delta\omega = \left| \frac{E_n - E_m}{\hbar} \right|$$

Der Erwartungswert einer bel. Observablen in der Sup. $|\varphi_n\rangle + |\varphi_m\rangle$ oszilliert mit Frequenz $\omega = \left| \frac{E_n - E_m}{\hbar} \right|$!



„Quantenschwebung"

Beispiele : • Larmorpräzession :

$|\varphi_{z+}\rangle$, $E_+ = -B\mu_0$

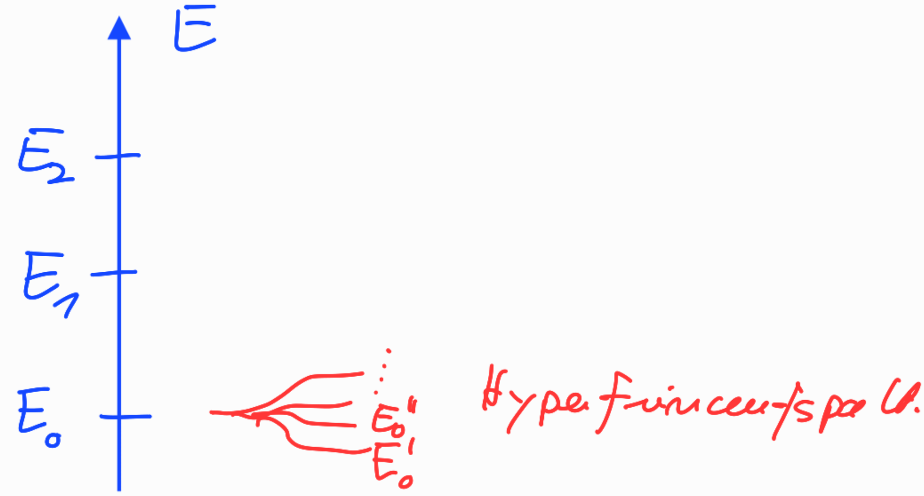
$|\varphi_{z-}\rangle$, $E_- = +B\mu_0$

$$\rightarrow \quad \Delta\omega = \left|\frac{E_+ - E_-}{\hbar}\right| = \frac{2B\mu_0}{\hbar} = \omega_L \; !$$

⋮

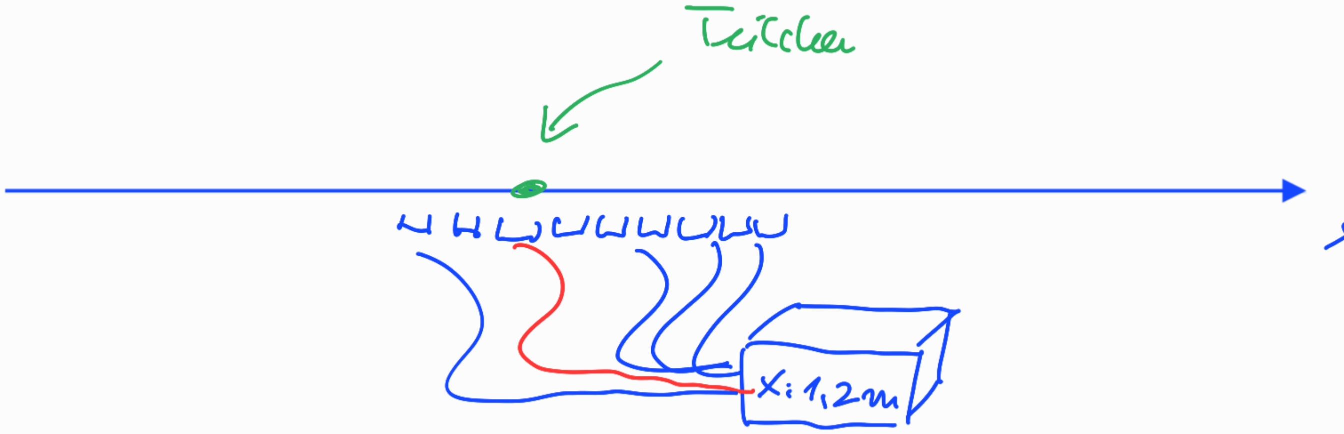
• **Atomuhr** :

^{133}Cs :



$$\rightarrow \quad \nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{E_0'' - E_0'}{2\pi\hbar} = 9,\dots \text{ GHz} \; !$$

Quantenmechanik des Punktteilchens (in 1D)



Observable: Ort x $\longleftrightarrow$ hermitescher Operator

$\hat{X}$:

kontinuierliche Spektrum

an Eigenwerten $x \in \mathbb{R}$!

mögliche Messwerte:

$x \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

$\uparrow$

Idealisierung!

$\Rightarrow$ Eigensystem:

$$\{ |\varphi_x\rangle \}_{x \in \mathbb{R}}$$

$\uparrow$

„$\dim \mathcal{H} = \infty$" !

„$\underline{\dim \mathcal{H}} < \infty$"

<u>bisher</u>: <u>endl. dim VR $\mathcal{H}$</u>

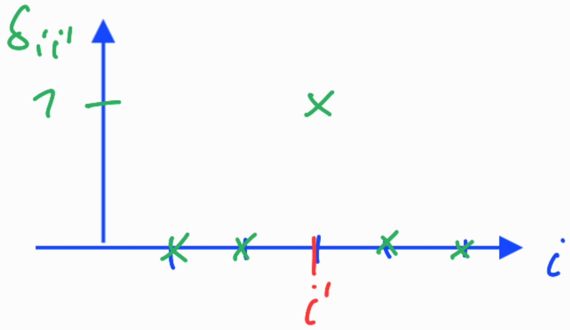
$\Rightarrow$ diskrete Eigenwerte

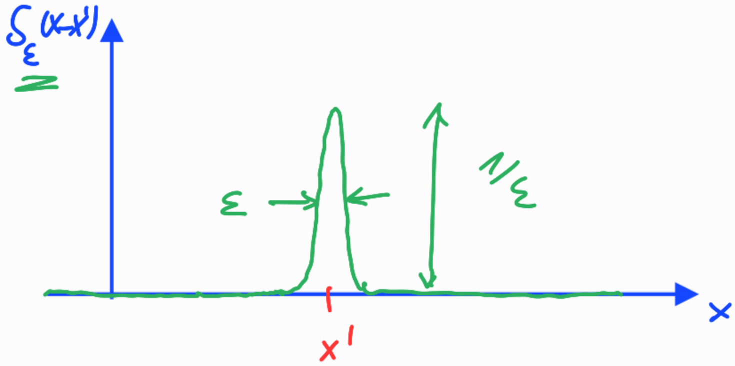
$\uparrow$

<u>Lineare Algebra</u> $\longrightarrow$ <u>Funktionalanalysis</u>

„<u>Kontinuumsübergang</u>"

diskret	kontinuierlich
• Kronecker-Delta: $\delta_{ii'}$	• Deltafunktion (Dirac) $\delta(x-x')$





• $\sum_i \delta_{ii'} = 1$

• $\delta_{ii'} = 0 \;:\; i \neq i'$

• $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x-x') = 1$

• $\delta(x-x') = 0 \;:\; x' \neq x$

• orth. Eigen-Basis eines herm. Op. A:

$$B = \{ |\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle \}$$

• orth. Eigensystem

$$\{ |\varphi_x\rangle \}$$

des Ortsoperators $\hat{x}$

Orthonormalität

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \Big| \qquad \langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle \overset{!}{=} \delta(x-x')$$

Vollständigkeit

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \overset{!}{=} \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \qquad \Big| \qquad \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} dx\, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$$

Spektraldarstellung

$$A = \sum_i a_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

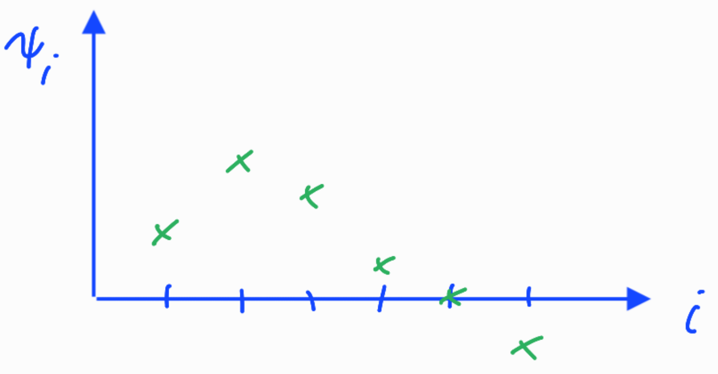
$$\hat{X} = \int_{\mathbb{R}} dx \; x \, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$$

Komponentendarstellung

$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \sum_i |\varphi_i\rangle \underbrace{\langle\varphi_i|\psi\rangle}_{\stackrel{!!}{=}\,\psi_i}$$

$$\rightsquigarrow \quad |\psi\rangle = \sum_i \psi_i \, |\varphi_i\rangle$$

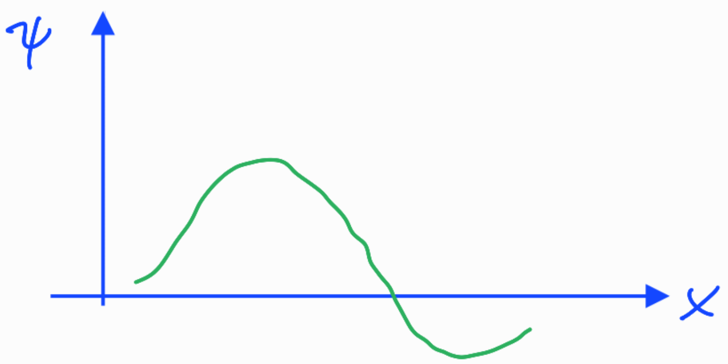
Komponenten von $|\psi\rangle$



$$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \, |\varphi_x\rangle \underbrace{\langle\varphi_x|\psi\rangle}_{\stackrel{!!}{=}\,\psi(x)}$$

$$\rightsquigarrow \quad |\psi\rangle = \int dx \; \psi(x) \, |\varphi_x\rangle$$

"Wellenfunktion" des Zustands $|\psi\rangle$: $\boxed{\psi(x) := \langle\varphi_x|\psi\rangle}$



Skalarprodukt

$$\langle \psi | \chi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \chi \rangle$$

$$= \langle \psi | \sum_i | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \, | \chi \rangle$$

$$= \sum_i \psi_i^* \chi_i$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \chi \rangle$$

$$= \langle \psi | \left(\int dx \, | \varphi_x \rangle \langle \varphi_x | \right) | \chi \rangle$$

$$= \int dx \, \underbrace{\langle \psi | \varphi_x \rangle}_{= \psi^*(x)} \underbrace{\langle \varphi_x | \chi \rangle}_{\chi(x)}$$

$$\boxed{\langle \psi | \chi \rangle = \int dx \, \psi^*(x) \, \chi(x)}$$