Letzte Woche:

Impuls $\overset{!}{=}$ Erzeuger der Translationen

$$T(s): \ |\varphi_x\rangle \longmapsto |\varphi_{x+s}\rangle$$

d.h. $\boxed{p := i\hbar \frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0}}$

$\rightarrow$ • Wirkung auf Wellenfkt.:

$$\psi(x) \xrightarrow{p} \boxed{-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}} \psi(x)$$

• $p = p^+$

Γ $p^+ = \left(i\hbar \frac{d}{ds} T(s)\Big|_{s=0} \right)^+$

$= -i\hbar \frac{d}{ds} T(-s)\Big|_{s=0} = p$

$T^+(s) = T^{-1}(s) = T(-s)$

$\bot$

• $[x, p] = i\hbar$

• $T(s) = e^{-\frac{i}{\hbar} p s}$

Impulseigenzustand $|\tilde{\varphi}_p\rangle$ zum Impulseigenw. $p \in \mathbb{R}$

mit Wellenfkt.

$$\langle \varphi_x | \tilde{\varphi}_p \rangle = \boxed{\tilde{\varphi}_p(x) = e^{i\frac{p}{\hbar}x}}$$

: ebene Welle mit

- Wellenzahl $k = p/\hbar$

$\rightarrow$ Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}$

(de Broglie)

Orthonormalität:

$$\boxed{\langle \tilde{\varphi}_p | \tilde{\varphi}_{p'} \rangle = 2\pi\hbar \, \delta(p - p')}$$

$p = \hbar k$

$p' = \hbar k'$

$$\boxed{\langle \tilde{\varphi}_{\hbar k} | \tilde{\varphi}_{\hbar k'} \rangle = 2\pi \, \delta(k - k')}$$

vgl. Ortseigenzustände $|\varphi_x\rangle$:

Orthonorm.: $\langle \varphi_x | \varphi_{x'} \rangle = \delta(x - x')$

Vollständigkeit: $\int dx \, |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| = \mathbb{1}$

Vollständigkeit:

$$\boxed{\int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, |\tilde{\varphi}_p\rangle\langle\tilde{\varphi}_p| \overset{!}{=} \mathbb{1}}$$

$p = \hbar k$

$$\boxed{\int \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{\varphi}_{\hbar k}\rangle\langle\tilde{\varphi}_{\hbar k}| = \mathbb{1}}$$

denn: $\langle\varphi_x|(\ \ldots\ )|\varphi_{x'}\rangle = \int \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\langle\varphi_x|\tilde{\varphi}_{\hbar k}\rangle}_{e^{ikx}} \underbrace{\langle\tilde{\varphi}_{\hbar k}|\varphi_{x'}\rangle}_{e^{-ikx'}}$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-x')} \overset{!}{=} \delta(x-x') = \langle\varphi_x|\mathbb{1}|\varphi_{x'}\rangle$$

$\rightarrow$ Impulsdarstellung:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\, |\tilde{\varphi}_{\hbar k}\rangle\langle\tilde{\varphi}_{\hbar k}|\psi\rangle$$

Impulswellenfkt.: $\tilde{\psi}(k) := \langle\tilde{\varphi}_{\hbar k}|\psi\rangle$

$$\boxed{|\psi\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, |\tilde{\varphi}_{\hbar k}\rangle}$$

$$\boxed{= \int dx\, \psi(x)\, |\varphi_x\rangle}$$

$$\boxed{\tilde{\psi}(k) \xleftrightarrow{F.T} \psi(x)}$$

Fouriertransformation !

$$\tilde{\psi}(k) = \langle \tilde{\varphi}_{+k} | \psi \rangle = \langle \tilde{\varphi}_{+k} | \int dx\, \psi(x) | \varphi_x \rangle$$

$$= \int dx\, \psi(x) \underbrace{\langle \tilde{\varphi}_{+k} | \varphi_x \rangle}_{e^{-ikx}}$$

$$\tilde{\psi}(k) \overset{!}{=} \int dx\, \psi(x)\, e^{-ikx}$$

$(F.T)^{-1}$

$$\psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, e^{+ikx}$$

⌈

$$\underbrace{\int \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k)\, | \tilde{\varphi}_{+k} \rangle}_{\text{Impulsdarstellung}} \overset{!}{=} | \psi \rangle \overset{!}{=} \underbrace{\int dx\, \psi(x)\, | \varphi_x \rangle}_{\text{Ortsdarstellung}}$$

„Wellenbild" „Teilchenbild"

$\downarrow$ Impulsmessung $\qquad\qquad$ $\downarrow$ Ortsmessung

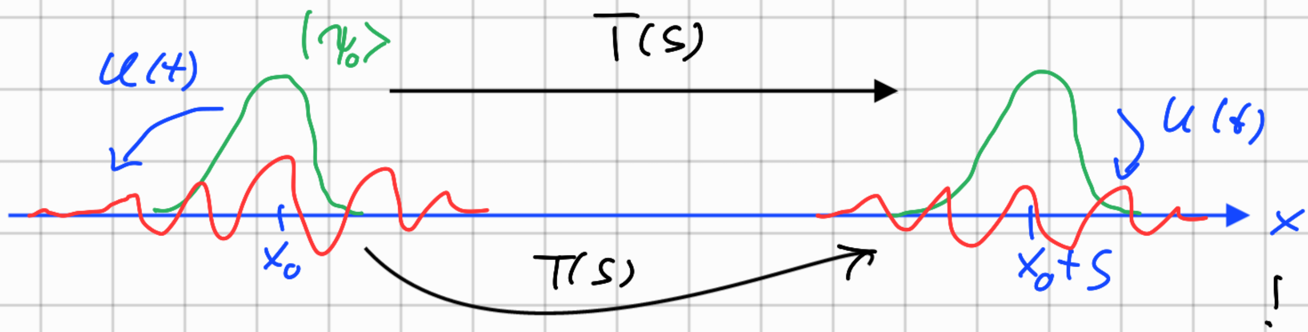
$| \tilde{\varphi}_{p_0} \rangle \qquad\qquad | \varphi_{x_0} \rangle$

⌋

Translationssymmetrie und Impulserhaltung

wir zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{System } (\hat{=} \text{ Hamiltonop. } H\,!) \text{ ist} \\ \text{symmetrisch bzg. Translationen}\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{Impuls } p \\ \text{Erhaltungsgröße}\end{array}}$$



$$\forall: \quad \begin{tikzcd} |\psi_0\rangle \arrow[rr, "T(s)"] \arrow[d, "U(t)"'] & & T(s)|\psi_0\rangle \arrow[d, "U(t)"] \\ U(t)|\psi_0\rangle \arrow[r, "T(s)"] & T(s)U(t)|\psi_0\rangle \overset{!}{=} & U(t)T(s)|\psi_0\rangle \end{tikzcd}$$

$$\iff \quad T(s)U(t) = U(t)T(s)$$

$$\boxed{:\iff \quad [T(s), U(t)] = 0}$$

$$\iff \quad [H, p] \quad \iff \quad p \text{ Erhaltungsgröße!}$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ p \end{Bmatrix} := \text{Erzeuger von} \begin{Bmatrix} U(t) \\ T(s) \end{Bmatrix} \quad (\text{Aufgabe } 11)$$

Schrödingergl. des Punktteilchens

$\Rightarrow$: $|\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle$

$\Rightarrow$ $H = ?$

zunächst: freies Teilchen

$\Rightarrow$ Translationssymmetrie!

$\rightarrow$
- Impulserhaltung $[H, p] = 0$!
- Energie-Impuls-Relation: $\langle H\rangle_\psi \overset{!}{=} \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle_\psi$

erfüllt: $\boxed{H := \frac{p^2}{2m}}$

$\Rightarrow$ $i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = \frac{p^2}{2m} |\psi(t)\rangle$

in Ortsdarstellung: $|\psi(t)\rangle = \int dx \; \psi(x,t) \, |e_x\rangle$

$p \hat{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$\Rightarrow$ $$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)}$$

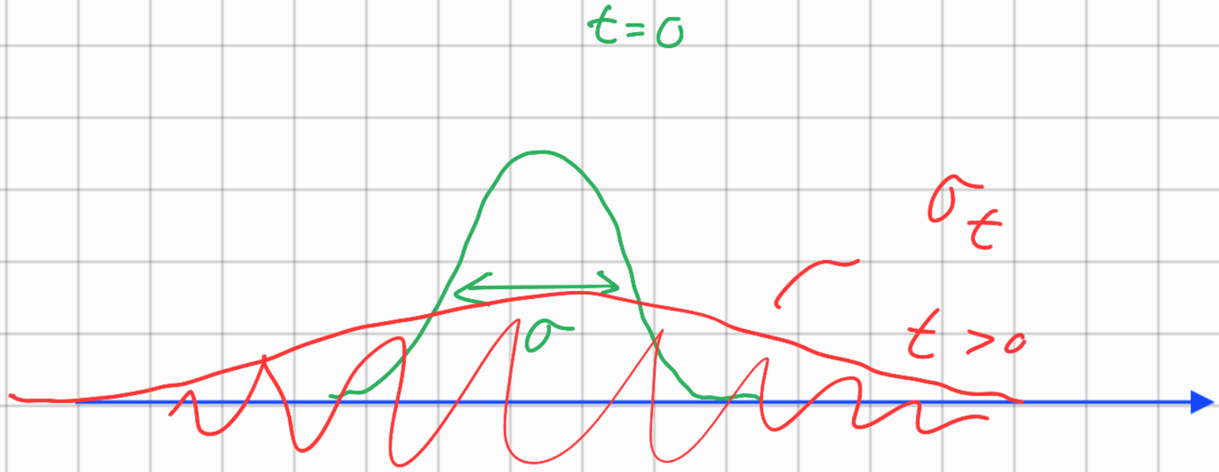
$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)}$$

part. DGL 2. Ord. $\simeq$ Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = a\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

in imag. Zeit $\underline{i}\,t$!

<u>nicht-triviale</u> Dynamik (des freien Teilchens!):



vgl. Aufgabe 14!

$$\sigma_t = \sigma\left(1 + t^2/\tau^2\right)^{1/2}$$

$$\tau = 2m\sigma^2/\underline{\hbar}$$

allg. S.GC: ~~Translationsinvarianz~~ : $[H,P] \neq 0$

$$H = H(\hat{x}, \hat{p}) \quad !$$

$$\boxed{H := \frac{p^2}{2m} + U(\hat{x})}$$

Potenzialfunktion

Ehrenfest-Theorem:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t} \overset{!}{=} \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_t} \quad !$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle_{\psi_t} \overset{!}{=} -\langle U'(\hat{x})\rangle_{\psi_t} \approx -U'(\langle\hat{x}\rangle_{\psi_t})$$

$$\hookrightarrow : \quad i\hbar\,|\dot{\psi}(t)\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x})\right)|\psi(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\psi(x,t)}$$

(E. Schrödinger 1926)

Standardmethode: $\quad \psi_n(x) \leftarrow |\psi_n\rangle$

(1.) bestimme normierbare Energieeigenzustände

und Eigenenergien E_n:

$$E_n |\psi_n\rangle = H |\psi_n\rangle$$

Ortsdarstellung:

$$\boxed{E_n \psi_n(x) \overset{!}{=} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\psi_n(x)}$$

stationäre S.Gl.

$\rightarrow \quad E_0, E_1, E_2, \ldots$

$\rightarrow \quad \psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$

(2.) $\rightarrow$ Dynamik:

Energieeigenfkt.

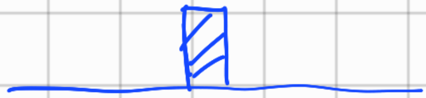
$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\ldots} c_n |\psi_n\rangle$$

$$\hookrightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |\psi_n\rangle$$

Modellsysteme

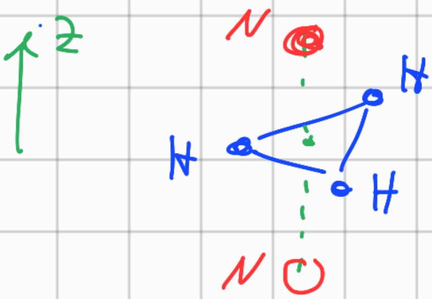
- Potentialkasten:

- Potentialbarriere



- harmon. Oszillator:

- Doppelmuldenpotential:



↳ Doppelkastenpotential

Teilchen im Potentialkasten:

$$U(x) = \begin{cases} V & : \; x < 0, \; x > a \\ 0 & : \; 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Stat. S.G. :

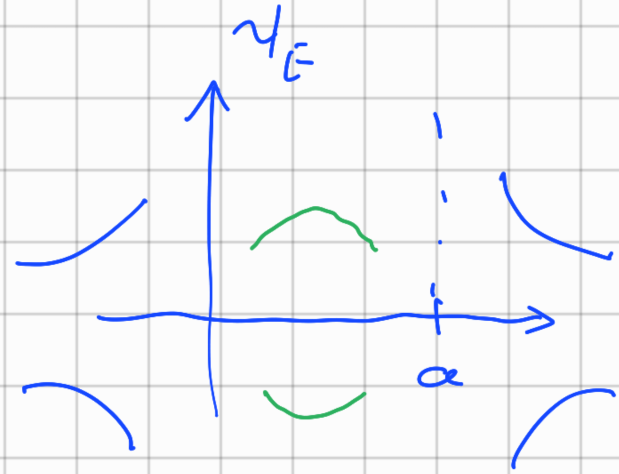
$$E \, \psi_E(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_E''(x) + U(x)\, \psi_E(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \psi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \left(U(x) - E \right) \psi_E(x)$$

- Bereiche mit $U(x) > E$:

$$\psi_E''(x) = c \; \psi_E(x)$$

$\psi_E > 0$: $\quad \psi_E$ konvex!



∘ Bereiche mit $U(x) < E$:

$\rightsquigarrow$ ∘ $\psi_E''(x) = - c\, \psi(x)$

!

$\psi_E > 0$: $\psi_E(x)$ konkav !