Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 10

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Wenn die Abgabe bis zur nächsten Übungsstunde korrigiert sein soll: Donnerstag, den 23. Dezember, bis 14 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie. Sonst: direkt in den Übungen am 11. Januar.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

40. Maxwell-Verteilung

3+3+5 Punkte

Ein klassisches Teilchen bewegt sich in einem Potential in einem beschränkten Volumen, die Hamilton-Funktion lautet $H(\underline{q}, \underline{p}) = V(\underline{q}) + \frac{\underline{p}^2}{2m}$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des kanonischen Ensembles für das Teilchen bei Temperatur T.

b) Bestimmen Sie daraus die reduzierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $\underline{q}$ und $\underline{p}$.
Hinweis: dafür muss man jeweils die uninteressante Variable ausintegrieren, z.B. $\rho(\underline{q}) = \int \rho(\underline{q}, \underline{p})\, d^3p$.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $p := |\underline{p}|$ sowie die Erwartungswerte von p und p^2.
Hinweis: Die Verteilung für p erhält man, indem man $\underline{p}$ in Kugelkoordinaten als

$$\underline{p} = p\left(\cos(\theta)\, \underline{e}_z + \sin(\theta)\left(\cos(\varphi)\, \underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{\ } e_y\right)\right)$$

schreibt und die Winkelvariablen über die Verteilung von $\underline{p}$ ausintegriert:

$$\rho(p) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \sin(\theta) p^2 \rho(\underline{p})$$

41. Teilchen in einer Box

4+1+2+4 Punkte

Ein quantenmechanisches Teilchen mit Masse m kann sich in einer Dimension auf einem Intervall der Länge L bewegen. Wir erinnern uns: Die Eigenzustände des Hamilton-Operators sind dann stehende Wellen der Form $\Psi(x) = \sin(kx)$ mit quantisiertem k: $kL = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Eigenwerte sind jeweils $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$. Wir ignorieren die Quantenmechanik und betrachten das Teilchen einfach als ein System mit diesen diskreten Zuständen. Es sei an ein Wärmebad mit Temperatur T gekoppelt.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Teilchens.
Hinweis: die Summe über alle $n \in \mathbb{Z}$ kann näherungsweise durch ein Integral ersetzt werden.

b) Nun soll sich das Teilchen in einer dreidimensionalen, kubischen Box der Kantenlänge L bewegen können. Was ist dann die Zustandssumme?

c) Was ist die kanonische Zustandssumme für N nicht wechselwirkende, ununterscheidbare Teilchen in dieser Box?

d) Berechnen Sie daraus die freie Energie, den Druck, die Entropie und innere Energie von N Teilchen in einer Box.

42. Virialsatz

4+3+5 Punkte

Ein System habe eine Hamiltonfunktion mit folgender Skalierungsidentität für alle $a > 0$:

$$H(a^{\lambda_1} q_1, \ldots, a^{\lambda_N} q_N, a^{\gamma_1} p_1, \ldots, a^{\gamma_N} p_N) = aH(q_1, \ldots, p_N)$$

mit festen Parametern λ_i und γ_i.

a) Zeigen Sie über die in der Vorlesung besprochene Version des Virialsatzes, dass im kanonischen Ensemble gilt: $\langle H \rangle = k_B T \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \gamma_i)$.
Tipp: obige Gleichung nach a differenzieren.

b) Bestimmen Sie mittels a) die kalorische Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases.

c) Eine gravitativ gebundene Gaswolke aus N Teilchen der Masse m hat die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}_1, \ldots, \underline{q}_N, \underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\underline{p}_i|^2}{2m} - \sum_{i \neq j} \frac{Gm^2}{|\underline{q}_i - \underline{q}_j|}$$

Berechnen Sie die mittlere Energie dieses Systems bei Temperatur T und daraus seine Wärmekapazität. Seltsam, nicht? Was passiert, wenn das System Wärme nach außen abstrahlt?
Anmerkung: Bevor der Virialsatz hier angewandt werden darf, müsste das System erst auf geeignete Art und Weise regularisiert werden (zB. durch Einführen eines endliches Volumen und eines nicht-singuläres Potenzials). Dies erschwert die Analyse, ändert das Ergebnis signifikant aber nur in Grenzfällen.

43. Energiefluktuationen

2+4 Punkte

Ein thermodynamisches System sei durch das kanonische Ensemble mit Zustandssumme $Z(T)$ beschrieben. Mit der Definition $\beta = \frac{1}{k_B T}$ wurde in der Vorlesung ja schon $\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ bewiesen. Beweisen Sie nun:

a)

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{(\partial \beta)^2}$$

b) Die Varianz der Energie erfüllt

$$(\Delta E)^2 \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = C_V k_B T^2$$

Wie verändert sich $\frac{\Delta E}{E}$ in Abhängigkeit der Systemgröße?
Hinweis: Beginnen Sie mit einer geeigneten Definition von C_V und formen Sie die Ableitung nach T in die Ableitung nach β um.