Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 13

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Freitag, 28. Januar, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

53. Verteilungsfunktionen *5 Punkte*

Skizzieren Sie die mittleren Teilchenzahlen $n_B(E)$ und $n_F(E)$ für $\mu = 0$ im Energiebereich $0 \leq E \leq 2k_BT$. Zeichnen Sie ebenfalls die Verteilung für klassische, ununterscheidbare Teilchen ein ($n_K(E) = e^{\beta(\mu-E)}$).

54. Besetzungszahlen idealer Quantengase *5+5+5+5 Punkte*

Wir betrachten ein ideales Quantengas (Fermionen oder Bosonen) mit Einteilchenzuständen $|q\rangle$. Die Besetzungszahl im Zustand q ist n_q, $\langle n_q \rangle$ entsprechend die mittlere Besetzungszahl.

a) Berechnen Sie das großkanonische Potential aus der Zustandssumme des idealen Quantengases, und aus diesem die mittleren Besetzungszahlen der verschiedenen Energieniveaus.

b) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie $E = -\frac{\partial \ln Z_g}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle$ in beiden Fällen durch $E = \sum_q E_q \langle n_q \rangle$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass sich die Entropie des idealen Quantengases in der Form

$$S = k_B \sum_q - \langle n_q \rangle \ln \langle n_q \rangle \mp (1 \mp \langle n_q \rangle) \ln(1 \mp \langle n_q \rangle)$$

schreiben lässt, wobei das obere Vorzeichen für Fermionen und das untere Vorzeichen für Bosonen gilt.
Hinweis: Es hilft, die Berechnung für Bosonen und Fermionen getrennt durchzuführen.

d) Zeigen Sie, dass der Beitrag zur Shannon-Entropie des Zustands q für Fermionen der einer binären Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p_{\text{bin}}(n_q) = (1 - \langle n_q \rangle)\delta_{0,n_q} + \langle n_q \rangle \delta_{1,n_q}$$

ist, und dass der entsprechende Beitrag für Bosonen der deiner geometrischen Verteilung

$$p_{\text{geo}}(n_q) = (1 - a_q)(a_q)^{n_q}$$

ist. Identifizieren Sie den Parameter a_q im bosonischen Fall.

55. Einfaches Quantensystem *5 Punkte*

Ein Quantensystem mit drei Zuständen habe einen Hamiltonoperator der Form

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b^* & 0 & b^* \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems und die kanonische Dichtematrix in einer beliebigen Basis.

56. Quantenkorrekturen *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Zustandsgleichung eines idealen Fermigases (Spin $s = 1/2$) im Grenzfall geringer Teilchendichte $n = N/V$ durch

$$pV \; = \; k_B T N \, (1 \; + \; \frac{1}{2^{7/2}} \, n\lambda_T^3)$$

gegeben ist. $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ bezeichnet die thermische Wellenänge.

Für die Klausurzulassung:

Von allen Bachelor-Studenten benötigen wir die Matrikelnummer und das Hauptfach. Bitte teilen Sie diese Ihren Übungsgruppenleitern mit, idealerweise beim Besuch der Übung.