Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 2

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Freitag, 29. Oktober, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

9. Binominalverteilung

3+3 Punkte

Eine gezinkte Münze zeigt bei einmaligem Wurf mit Wahrscheinlichkeit q Zahl und mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ Kopf. Diese Münze wird nun n mal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie k mal Zahl und $n-k$ mal Kopf in einer fest vorgegebenen Reihenfolge zeigt?

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P_{n,q}(k)$, dass die Münze k mal Zahl und $n-k$ mal Kopf in **beliebiger** Reihenfolge zeigt, genau $q^k(1-q)^{n-k}\binom{n}{k}$ ist.

10. Gesetz der großen Zahl

5 Punkte

Udo und Ivo pokern den ganzen Tag, Runde um Runde, und bei jeder Runde gehen ca. 50 EUR über den Tisch. Am Ende des Tages, nach ungefähr 100 gespielten Runden, hat Udo 532,- EUR gewonnen und Ivo natürlich denselben Betrag verloren. Udo schreibt seinen Gewinn seinen großartigen Pokerfähigkeiten zu, Ivo möchte davon nichts wissen und erklärt seinen Verlust (und damit Udos Gewinn) lieber durch Kartenpech. Wer von beiden liegt (wahrscheinlich) der Wahrheit näher?

11. Sechs Würfel

1+2+2+2+2+4+4 Punkte

Sechs Würfel werden geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ... nur Sechser fallen?

b) ... alle Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen?

c) ... genau zwei Sechser fallen?

d) ... mindestens zwei Sechser fallen?

e) ... mindestens zwei gerade Augenzahlen fallen?

f) Was ist der Erwartungswert und die Varianz der Summe der Augenzahlen?
Hinweis: Auch hier hilft das Gesetz der großen Zahl.

g) Verwenden Sie die Tschebyscheff-Ungleichung, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass die Augensumme um mindestens 15 vom Erwartungswert abweicht. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Teil a).

12. Statistische Varianz

6 Punkte

Wir betrachten n-fache Stichproben einer mehr oder weniger zufälligen Größe X. Wie in der Vorlesung seien die n Werte der Größe in einer Stichprobe durch n unabhängige Zufallsvariablen $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ beschrieben. Die Zufallsvariablen $X^{(i)}$ besitzen alle Erwartungswert $\mu = 0$ (der Einfachheit halber) und Varianz σ^2. Die Zufallsvariablie $\overline{\Delta X_n^2}$, genannt "*statistische Varianz der n-fachen Stichprobe von X*", ist definiert durch

$$\overline{\Delta X_n^2} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X^{(i)} - \overline{X_n} \right)^2 ,$$

wobei $\overline{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\Delta X_n^2}$ genau den Erwartungswert σ^2 besitzt!

13. Eine wahre Begebenheit

4+4+ Punkte*

Im II. Weltkrieg haben die Deutschen ihren Panzern eine Seriennummer verpasst und diese Nummern selbstverständlich lückenlos und streng aufsteigend verteilt. Der erste produzierte Panzer war Nr. 1, der zweite Nr. 2, und so weiter. Angenommen, es wurden bisher N Panzer produziert und von diesen sind den Alliierten n in die Hände gefallen.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die größte dabei auftretende Seriennummer nicht kleiner oder gleich m war? Hier wollen wir noch annehmen, dass die Verteilung der Seriennummern der eroberten Panzer die Laplace'sche war, d.h. das Panzer Nr. 1 genauso wahrscheinlich auftrat wie Panzer Nr. N.

b) Natürlich ist die Gleichverteilungsannahme nicht ganz richtig; früher produzierte Panzer waren schon länger im Einsatz und wurden so häufiger erobert. Eine realistischere Annahme ist die Verteilung $P(\text{Seriennummer} = k) = \frac{2(N+1-k)}{N(N+1)}$. Was ergibt sich dann für die Wahrscheinlichkeit, dass die größte, den Alliierten bekannte, Seriennummer nicht kleiner oder gleich m war?

c) *Ohne Punkte:* Was konnten die Alliierten folgern, wenn sie n Panzer mit größter Seriennummer m erobert hatten?