Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

# Statistische Mechanik
# Blatt 3

*Wintersemester 2010/11*

**Abgabe:** *Freitag, 5. November, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

## 14. Charakteristische Funktion

*6+4 Punkte*

Zu einer Zufallsvariable $X$ definieren wir die charakteristische Funktion als

$$\begin{array}{rccc} \chi_X & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & k & \mapsto & < e^{-ikX} > \end{array}$$

*Anmerkung: Hat $X$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$, so ist $\chi_X(k)$ deren Fouriertransformierte $\hat{p}(k)$.*

**a)** Zeigen Sie für alle unabhängigen Zufallsvariablen $X$ und $Y$ sowie Zahlen $a \in \mathbb{R}$:

1. $\chi_X(0) = 1$
2. $|\chi_X(k)| \leq 1$ für alle $k$
3. $i \, \frac{d}{dk} \, \chi_X(k)\big|_{k=0} =< X >$
4. $- \frac{d^2}{dk^2} \, \chi_X(k)\Big|_{k=0} =< X^2 >$
5. $\chi_{aX}(k) = \chi_X(ak)$
6. $\chi_{X+Y}(k) = \chi_X(k) \, \chi_Y(k)$

Bei 3. und 4. sei vorausgesetzt, dass beide Seiten existieren und endlich sind.

**b)** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{n,q}(x) = \sum_{l=0}^{n} \delta(x-l) \; q^l (1-q)^{n-l} \binom{n}{l}$$

Bestimmen Sie $\chi_X$ und daraus Mittelwert und Varianz von $X$.

## 15. Wahrscheinlichkeitsdichten

*2+2+2+2+2 Punkte*

Bestimmen Sie von den folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten jeweils den korrekten Normierungsfaktor $N_i$ sowie Erwartungswert und Varianz. $a$ ist jeweils ein positiver Parameter, $\Theta(x) := \begin{cases} 0 & : \; x < 0 \\ 1 & : \; x \geq 0 \end{cases}$. *Hinweis: Eine Skizze der Dichte ist jeweils hilfreich.*

**a)** $p(x) = N_1 \, (a - |x|) \, \Theta(a - |x|)$

**b)** $p(x) = N_2 \, \Theta(a - x) \, \Theta(x)$

**c)** $p(x) = N_3 \, \Theta(x) \, e^{-ax}$

**d)** $p(x) = \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{4}\delta(x-2a)$

**e)** $p(x) = N_4 \, \frac{1}{a^2+x^2}$

## 16. Zentraler Grenzwertsatz

*2+3+3+3 Punkte*

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 > 0$. Wieder seien $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ $n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie $X$, und

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} \; (= \sqrt{n}\, \overline{X}_n)$$

deren mit $\sqrt{n}$ skalierter Mittelwert, wieder eine Zufallsvariable. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass die Varianz von $\overline{X}_n$ durch $\sigma^2/n$ gegeben ist. Wir wollen noch weiter gehen: Für große $n$ und vernünftige Verteilungen von $X$ geht die Verteilung von $Z_n$ in gewissem Sinne gegen eine nur von der Varianz bestimmte Gaußverteilung.

**a)** Zeigen Sie:

$$\chi_{Z_n}(k) = \left(\chi_X\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

**b)** Motivieren Sie in obigem Ergebnis die Näherung $\chi_X(\frac{k}{\sqrt{n}}) \approx e^{-\frac{(\sigma k)^2}{2n}+\epsilon}$. Die kleine Störung $\epsilon$ ist noch eine Funktion von $k$, $n$ und $\chi_X$. Welche Bedingungen muss man an $\chi_X$ stellen?

**c)** Präzisieren Sie $\epsilon$ und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \chi_{Z_n}(k)$.

**d)** Berechnen Sie $\chi_Y$ der Zufallsvariable $Y$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2}$$

und vergleichen Sie.
*Hinweis: der Normierungsfaktor* $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ *ist nur das: er garantiert* $\int_{-\infty}^{\infty} p(Y)dY = 1$ *und fällt schnell aus der Rechnung heraus.*

## 17. Satz von Liouville

*2+4+3 Punkte*

In geeigneten Einheiten ist die Hamilton-Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators $H_0(q,p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$.

**a)** Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichungen und lösen Sie diese allgemein.

**b)** Skizzieren Sie das Phasenraumvolumen $\{(q,p) \mid 1 \leq q \leq 2 \wedge -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}\}$ und wie es sich nach den Zeiten $\frac{\pi}{4\omega}$, $\frac{\pi}{2\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$, $\frac{3\pi}{2\omega}$ und $\frac{2\pi}{\omega}$ entwickelt.

**c)** Nun stören wir den Oszillator etwas: die Hamilton-Funktion ist nun $H_1(q,p) = H_0(q,p) + \frac{\epsilon}{2}(p^2 + q^2)^2$ mit kleinem $\epsilon$. Wie verändert das die Bewegungsgleichungen? Wie sieht das Phasenraumvolumen aus b) aus, nachdem es sich für eine gegenüber $1/\epsilon$ großen Zeit entwickelt hat?