Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 4

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Freitag, 12. November, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

18. Adsorption

2+2+3+3 Punkte

Auf einer Metalloberfläche sollen sich an M Gitterplätzen Fremdatome anlagern können. Diese Gitterplätze sind jedoch nicht alle gleich; an M_1 ist die Bindungsenergie der Atome ϵ_1 (Plätze von Typ 1), an M_2 ist sie ϵ_2 (Plätze von Typ 2). Insgesamt seien N Atome angelagert, M_1, M_2 und N wollen wir als fest betrachten.

a) Jeweils N_i der Atome seien an Plätzen von Typ i angelagert ($N_i \leq M_i$). Wieviele Zustände mit dieser Eigenschaft gibt es?

b) Bestimmen Sie die Entropie in Abhängigkeit der Energie E. Verwenden Sie die Näherungen aus Aufgabe 8 von Blatt 1: $\ln \binom{n}{\lambda n} \approx n H_2(\lambda), H_2(\lambda) = -\lambda \ln(\lambda) - (1-\lambda)\ln(1-\lambda)$.
Hinweis: Die Energie in Abhängigkeit von N_1 und N_2 ist $E = -N_1\epsilon_1 - N_2\epsilon_2$.

c) Bestimmen Sie die Temperatur in Abhängigkeit von E.

d) Ab hier wollen wir annehmen, dass es weit weniger Atome als Gitterplätze beider Sorten gibt: $N \ll M_1, N \ll M_2$. Zeigen Sie die Relation

$$\frac{N_1}{N} = \frac{M_1}{M_1 + M_2 \exp\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{k_B T}\right)}$$

Was passiert bei hohen Temperaturen, was bei niedrigen (Fallunterscheidung nach Vorzeichen von $\epsilon_1 - \epsilon_2$)?

19. Ultrarelativistisches ideales Gas

10 Punkte

Bewegen sich die Teilchen eines Gases mit nahezu Lichtgeschwindigkeit c, so muss ihre Energie relativistisch gemäß der Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{(m_0 c)^2 + c^2 |\underline{p}|^2}$ bestimmt werden. Im Falle sehr hochenergetischer Gasteilchen mit $E \gg m_0 c^2$ spricht man von einem ultrarelativistischen Gas. Hier kann die Ruhemasse m_0 vernachlässigt werden und die Energie eines Teilchens mit Impuls $\underline{p}$ ist in guter Näherung $E = c|\underline{p}|$. Bestimmen Sie anhand des mikrokanonischen Ensembles die kalorische Zustandsgleichung eines ultrarelativistischen Gases mit N Teilchen im Volumen V.

20. Harmonische Oszillatoren

10+6+4 Punkte

Das mikroskopische System $\mathcal{A}$ sei ein harmonischer Oszillator der Frequenz ω mit Eigenzuständen $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, zu Eigenenergien $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$. Wir betrachten nun ein makroskopisches System $\mathcal{M}$, das aus einer großen Anzahl $N \gg 1$ identischer Systeme $\mathcal{A}$ besteht. Ein Mikrozustand x des makroskopischen Systems $\mathcal{M}$ ist dann durch die Quantenzahlen (Besetzungszahlen) $n_1, \ldots, n_N$ gegeben: $x = (n_1, \ldots, n_N)$, $n_i = 0, 1, 2, \ldots$. Die Energie des Systems $\mathcal{M}$ im Mikrozustand x ist dann $\sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})$. Wir subtrahieren die für die thermodynamische Behandlung unbedeutende konstante Gesamtnullpunktsenergie $N\hbar\omega/2$ und erhalten deshalb die Energie

$$H(x) = \hbar\omega \sum_{i=1}^{N} n_i \, .$$

a) Zeigen Sie folgende Relationen für Zustandsumme, Entropie und Temperatur:

$$Z(E) \;=\; \binom{K_E + N - 1}{N - 1} , \qquad \text{wobei} \quad K_E = \frac{E}{\hbar\omega} ,$$

$$S(E) \;=\; k_B(K_E + N)\, H_2(\tfrac{N}{K_E+N}) , \qquad \frac{1}{T(E)} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln(\tfrac{N}{K_E} + 1) \, .$$

($N \gg 1$, $H_2(x)$ bezeichnet wieder die binäre Entropie.)

b) Zeigen Sie anhand von a): Ein zufällig aus $\mathcal{M}$ gewählter Oszillator hat im Mittel die Energie

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} ,$$

und die mittlere Besetzungszahl $\bar{n} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1} n_i$ genügt der *Bose-Einstein-Verteilung*,

$$\bar{n} = b(\hbar\omega) \equiv \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \, .$$

c) Ermitteln Sie Näherungen für $\bar{n}$ für die Fälle $k_B T \gg \hbar\omega$ und $k_B T \ll \hbar\omega$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.