Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 5

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Freitag, 19. November, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

21. Oberfläche und Volumen in $d \gg 1$ — *5 Punkte*

Bestimmen Sie das Verhältnis der ε-verbreiterten Oberfläche $O_{d,\varepsilon}$ einer d-dimensionalen Einheitskugel zu ihrem Volumen $V_d(1)$ für $\varepsilon = 1/100$ und Dimensionen $d = 2, 3, 10, 100, 10^3, 10^4$ sowie $d = 10^{23}$. Verwenden Sie dabei $O_{d,\varepsilon} = V_d(1) - V_d(1-\varepsilon)$.
Hinweis: Eine vollständige Formel für das Kugelvolumen $V_d(r)$ benötigen Sie nicht, nur das Wachstumsverhalten mit r ist wichtig.

22. Druck — *3+10 Punkte*

Berechnen Sie den Druck in Abhängigkeit der Temperatur der folgenden Systeme (V_0 und E_0 sind dabei Referenzenergien, die aus der Rechnung herausfallen):

a) Ultrarelativistisches Gas aus Aufgabe 19,

$$S(E,V) = k_B N \left(\ln(V/V_0) + 3\ln(E/E_0)\right), \quad E = 3k_B N T$$

b) Van-der-Waals-Gas,

$$S(E,V) = k_B N \left(\ln\left(\frac{V - Nb}{V_0}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{E + aN^2/V}{E_0}\right)\right)$$

a und b sind positive Parameter geeigneter Dimension.
Hinweis: Hier ist zuerst die kalorische Zustandsgleichung zu berechnen.

23. Zweidimensionales Gas — *10 Punkte*

Bestimmen die kalorische und thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases, dessen N Atome sich nur in zwei Dimensionen auf eine Fläche mit Flächeninhalt F bewegen können. Die Bewegungsenergie jedes Atoms sei die klassische: $mv^2/2$.

24. Magnetisierung *7 Punkte*

Aus der Vorlesung kennen Sie die Entropie eines Paramagneten, bestehend aus N Elementarmagneten: $S = k_B N H_2(m_E + \frac{1}{2})$ mit $m_E = \frac{E}{\mu B N}$ und $H_2(x) = -x \ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$. Testen Sie die Formel $m = -\frac{T}{\mu N}\frac{\partial S}{\partial B}$ für die Magnetisierung an diesem einfachen Beispiel.

25. Energieaustausch *5 Punkte*

Nun wollen wir einen Paramagneten wie aus der vorherigen Aufgabe, der sich im thermischen Gleichgewicht in einem Mikrokanonischen Ensemble mit Energie E befinden soll, in zwei Teilmagnete mit N_1 bzw. N_2 Elementarmagneten zerteilen. Die Teilmagnete haben dann keine scharf begrenzte Energie bzw. Magnetisierung mehr. Berechnen Sie die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Einzelmagnetisierungen. Sinnvolle Näherungen sind erwünscht.
Hinweis: Drücken Sie die Magnetisierungen m_{E_1} und m_{E_2} der Teilsysteme als $m_{E_1} = m_E + Ax$ und $m_{E_2} = m_E - Cx$ mit geeigneten A und C aus. Wo und warum kann man gut Terme der Ordnung x^3 oder höher vernachlässigen?