
Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 10

Wintersemester 2022/23

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tp1_22.html/

Abgabe: bis **Mittwoch, 21.12.22, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4872329.html

38. Zur Diskussion

0 Punkte

- Was ist ein Vierervektor?
- Wie transformiert sich ein Vierervektor unter einer speziellen Lorentztransformation L_v ?
- Was ist das Pseudo-Skalarprodukt (u, v) zweier Vierervektoren u und v ?
- Sie unternehmen eine längere intergalaktische Reise und möchten die Länge (bzgl. Minkowski-Geometrie!) Ihrer dabei zurückgelegten Weltlinie bestimmen. Wie machen Sie das?

39. Lorentztrafo und Geschwindigkeitsaddition

2+5+3=10 Punkte

Die spezielle Lorentztransformation L_v zur Relativgeschwindigkeit $v\vec{e}_1$ lautet in Matrixschreibweise (und Beschränkung auf Zeit- und Raumkomponente x_0 bzw. x_1) bekanntlich

$$L_v = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

- Zeigen Sie durch explizite Matrixmultiplikation, dass $L_v^{-1} = L_{-v}$.
- Die Verkettung zweier spezieller Lorentztransformation L_u und L_v ergibt wieder eine Lorentztransformation. Zeigen Sie, dass

$$L_u L_v = L_w, \quad \text{mit} \quad w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

- Der relativistische Einstein-Express bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2}c$ relativ zu einem ruhenden Beobachter A . Ein Passagier B im Einstein-Express feuert ein relativistisches Geschoss mit Geschwindigkeit $u = \frac{3}{4}c$ (relativ zu B) parallel zur Bewegungsrichtung ab. Mit welcher Geschwindigkeit w bewegt sich das Geschoss relativ zu A ?
Hinweis: Argumentieren Sie, dass das Resultat aus **b)** hier genau die Antwort liefert.

40. Schleuse

10 Punkte

Ein Raumschiff der Länge $l = 100m$ durchfährt mit Geschwindigkeit $v = 0.5c$ eine $s = 90m$ lange Schleuse. Diese schließt für eine sehr kurze Zeitdauer gleichzeitig (im Ruhesystem der Schleuse) an beiden Enden jeweils ein Tor. Dies geschieht kurz bevor der Bug des Raumschiffs das vordere Schleusentor erreicht. Was passiert bei diesem Vorgang am hinteren Ende der Schleuse: kollidiert das hintere Schleusentor mit dem Raumschiff oder nicht?

Hinweis: Betrachten Sie die Weltlinien von Raumschiffbug und -heck im Ruhesystem der Schleuse.

41. Beschleunigungen

3+7=10 Punkte

Die Lorentztransformation L_v in Aufgabe 39. kann mittels der *Rapidity* ϕ , definiert durch

$$\tanh \phi = \frac{v}{c},$$

dargestellt werden gemäß

$$L_v = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} =: \Lambda_\phi.$$

- a) Zeigen Sie, dass sich bei Verkettung zweier Transformationen Λ_ϕ und Λ_θ die Rapiditäten addieren:

$$\Lambda_\phi \Lambda_\theta = \Lambda_{\phi+\theta}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$

- b) Ein Teilchen wird aus der Ruhe auf $v = \frac{1}{2}c$ beschleunigt. Nach dieser Beschleunigung wird bzgl. des neuen Ruhesystem des Teilchens dieses wiederum auf $v = \frac{1}{2}c$ beschleunigt, usw.. Nach wievielen Beschleunigungen auf jeweils $\frac{1}{2}c$ im jeweiligen Ruhesystem erreicht das Teilchen bzgl. des Ausgangssystems eine Endgeschwindigkeit von $0.99c$, $0.999c$ bzw. $0.9999c$?

Hinweise: $\tanh 0.55 = 0.5$, $\tanh 2.65 = 0.99$, $\tanh 3.8 = 0.999$, $\tanh 5.0 = 0.9999$.