Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 5

Wintersemester 2022/23

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tp1_22.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 16.11.22, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4872329.html

19. Teilchen auf einer Tischplatte *10 Punkte*

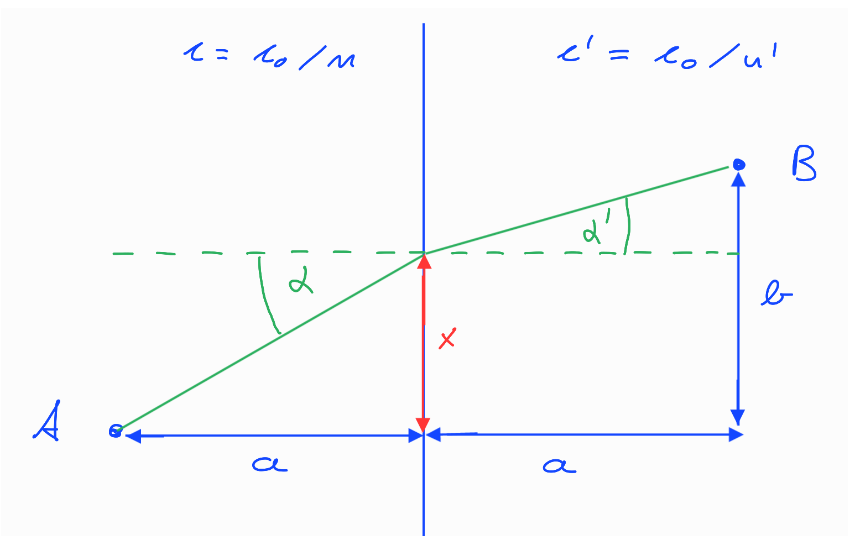
Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer ebenen Tischplatte. Nun wird ein kleines Loch in den Tisch gebohrt und von unten durch das Loch ein dünner Faden geführt. An diesem wird das Teilchen fixiert, das sich nun nur noch am gespannten Faden über die Ebene bewegen soll. Der Abstand des Teilchens vom Loch kann durch den Faden reguliert werden. Zu Zeiten $t < 0$ bewege sich das Teilchen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand d um das Loch. Während $0 \leq t \leq t_1$ wird der Abstand durch Fadenzug auf $d/2$ verkürzt. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotiert das Teilchen dann um das Loch? Welche Kräfte wirken auf das Teilchen während $t < 0$ und $t > t1$?

20. Fermatsches Prinzip zu Fuß *10 Punkte*

In dieser Aufgabe soll das Snelliussche Brechungsgesetz aus dem Fermatschen Prinzip des schnellsten Lichtlaufweg hergeleitet werden. Aufgrund der einfachen Geometrie kann hier das Variationsproblem mittels elementarer Analysis gelöst werden. Ermitteln Sie dazu in der skizzierten Situation die Lichtlaufzeit T als Funktion des Parameters x und minimieren Sie anschließend $T(x)$ durch geeignete Wahl von x. Zeigen Sie, dass für minimierenden Parameter x_0 das Snelliussche Brechungsgesetz gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n} \,.$$

n und n' sind die Brechungsindizes der optischen Medien im linken bzw. rechten Halbraum.
Hinweis: Die geradlinige Ausbreitung des Lichts *innerhalb* eines Halbraums setzten wir hier voraus.



21. Fermatsches Prinzip mit Euler und Lagrange *2+5+3=10 Punkte*

Anhand des Fermatschen Prinzips wollen wir nun die Lichtausbreitung in einem Medium mit ortsabhängigen Brechungsindex n (und damit ortsabhängiger Lichtgeschwindigkeit $c = c_0/n$) ermitteln. Als Beispiel nehmen wir eine durch Sonneneinstrahlung stark erhitzte Straße. Infolge der Einstrahlung entsteht oberhalb der Straße ein Temperaturgradient, der wiederum einen (geringfügig) höhenabhängigen Brechungsindex $n(y)$ bedingt (vgl. Skizze). In linearer Näherung sei

$$n(y) = n_0 + \lambda y \, .$$

Ein Lichtstrahl von A nach B sei durch den Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Laufzeit dieses Strahls ist dann durch das Laufzeit-Funktional

$$T[f] \;=\; \frac{1}{c_0} \int_a^b L\,(\,f(x),\; f'(x)\,)\,dx$$

mit Lagrange-Funktion

$$L(f, f') = (n_0 + \lambda f)\sqrt{1 + f'^2}$$

bestimmt (vgl. Vorlesung).

a) Zeigen Sie, dass für zu erwartende kleine Korrektur $\lambda y \ll 1$ und $f'^2 \ll 1$ die Lagrange-Funktion in guter Näherung gegeben ist durch

$$L(f, f') = \frac{n_0}{2} f'^2 \;+\; \lambda f \;+\; n_0 \, .$$

b) Berechnen Sie in der Näherung aus **a)** die partiellen Ableitungen $\frac{\partial L}{\partial f}$, $\frac{\partial L}{\partial f'}$ und damit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(\,f_0(x),\; f'(x_0)\,) \;=\; \frac{\partial L}{\partial f}(\,f_0(x),\; f'(x_0)\,)$$

für die Laufzeit $T[f]$ minimierende Funktion $f_0(x)$.

c) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung aus **b)**. Was folgt daraus für den Verlauf eines Lichtstrahls zwischen Punkten A und B wie in der Skizze?