
Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 7

Wintersemester 2022/23

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tp1_22.html/

Abgabe: bis **Mittwoch, 30.11.22, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4872329.html

26. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein verallgemeinerter Impuls?
- b) Wie bildet man eine Hamilton-Funktion?
- c) q und p seien Koordinate und Impuls eines Teilchens der Masse m in einer Dimension unter einer konservativen Kraft mit Potenzial $U(q)$. Wie lautet die Hamilton-Funktion $H(q, p)$?
- d) Was sind die Hamiltonschen Gleichungen?

27. Foucaultsches Pendel

4+4+2=10 Punkte

Ein Foucaultsches Pendel befindet sich an einem Ort geographischer Breite α (vgl. Skizze). Aufgrund der Erdrotation um die Polachse $\hat{n}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi/24h$ erfährt die Pendelmasse m die Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}, \quad (1)$$

wobei $\vec{\Omega} = \Omega\hat{n}$ und $\vec{r}$ der Koordinatenvektor der Pendelmasse bzgl. eines erdfesten Systems ist. In dieser Aufgabe wollen wir uns davon überzeugen, dass diese Corioliskraft zu einer langsamen Rotation der Pendelebene mit der Winkelfrequenz $\Omega \sin \alpha$ führt.

- a) Zeigen Sie, dass die lokalen erdfesten Koordinaten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Pendelmasse der Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2\Omega_3 \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix}$$

genügen. Hierbei ist die Pendelfrequenz des (ungestörten) Pendels und $\Omega_3 = \Omega \sin \alpha$ die $\vec{e}_3$ Komponente des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\Omega}$.

- b) Zeigen Sie nun, dass für $\Omega \ll \omega$

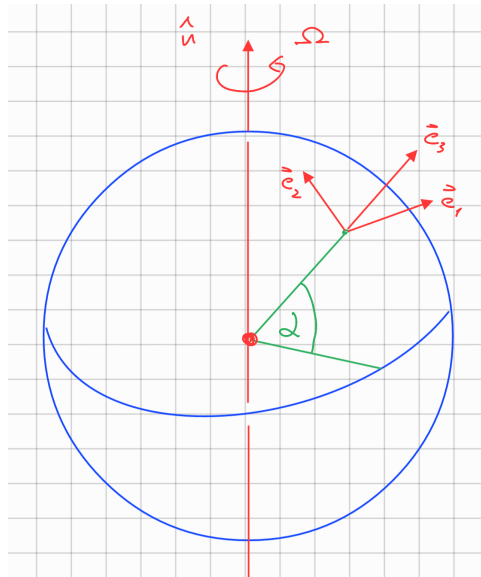
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a\vec{u}(t) \cos \omega t$$

mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix}$$

in sehr guter Näherung eine Lösung der Bewegungsgleichung aus a) darstellt.

- c) Angenommen, dass Foucaultsches Pendel hängt im Kölner Dom. Wie lange müssen Sie warten, bis dass die Pendelebene sich um 90° gedreht hat?



28. Fall eines Apfels

2+8=10 Punkte

Ein Apfel fällt vom Baum.

- Begründen Sie, dass aufgrund der wirkenden Corioliskraft der Apfel nicht genau senkrecht fällt, sondern etwas in östliche Richtung abgelenkt wird.
- Bestimmen Sie nun die Verschiebung Δs des Aufschlagpunkts von dem genau senkrecht unter dem Anfangsort liegenden Punkt o . Gehen Sie von einer geographischen Breite $\alpha = 50^\circ$ und einer Fallhöhe $H = 15m$ aus.

29. Hamilton-Funktion in Polarkoordinaten

4+4+2=10 Punkte

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in der Ebene unter einer konservativen Kraft mit Potenzial U . Die entsprechende Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten r, φ lautet bekanntlich

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi)$$

- Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse p_r und p_φ . Welche physikalische Bedeutung hat p_φ ?
- Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$.
- Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen für $\dot{p}_r(t)$ und $\dot{p}_\varphi(t)$ auf.