Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 8

Wintersemester 2022/23

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/tp1_22.html/*

Abgabe: bis **Mittwoch, 7.12.22, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_4872329.html

30. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie ist die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ zweier Phasenraumfunktionen A und B definiert?

b) Wie kann man die Zeitableitung $\dot{A}$ einer physikalischen Größe A mittels Hamiltonfunktion und Poisson-Klammer darstellen?

c) Die Hamiltonfunktion eines freien Teilchens der Masse m in einer Dimension ist $H(q,p) = p^2/2m$. Berechnen Sie $\{H, q\}$ als auch $\{H, p\}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Die *Energie* eines Hamiltonschen Systems ist per definitionem immer durch die Hamiltonfunktion $H(q,p)$ gegeben. Weshalb ist damit die Energie immer eine Erhaltungsgröße?

31. Harmonischer Oszillator *10 Punkte*

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Potential $U(q) = \frac{1}{2}kq^2$ für ein $k > 0$. Bestimmen Sie die zugehörige Lagrange- und Hamiltonfunktion, stellen Sie die Euler-Lagrange- sowie die Hamiltonschen Gleichungen auf und überzeugen Sie sich von deren Äquivalenz.

32. Hamiltonscher Fluss und der Satz von Liouville *3+3+4=10 Punkte*

a) Bestimmen und skizzieren Sie das Hamiltonsche Vektorfeld für den harmonischen Oszillator aus Aufgabe 31. Zeichnen Sie auch Phasenraumbahnen ein.

b) Bestimmen und skizzieren Sie das Hamiltonsche Vektorfeld für den (anti-)harmonischen Oszillator für den Fall $k < 0$. Zeichnen Sie hier ebenfalls Phasenraumbahnen ein.

c) Bestimmen und skizzieren Sie das Hamiltonsche Vektorfeld eines freien Teilchens in einer Dimension. Demonstrieren Sie den Satz von Liouville für ein um den Ursprung zentriertes Rechteck mit den Eckpunkten $(-a/2, \pm b/2), (a/2, \pm b/2)$. Skizzieren Sie die Entwicklung des Rechtecks im Hamiltonschen Fluss.

33. Wiederkehrzeit

3+7=10 Punkte

Wir betrachten ein System bestehend aus N Teilchen, die jeweils frei (d.h. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) auf einem Kreisring rotieren. φ_k sei die Winkelkoordinate des k-ten Teilchens. Die Umlaufzeit des k-ten Teilchens sei

$$T_k = k\, T_0\,, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

mit $T_0 = 1s$. Zur Zeit $t = 0$ gelte $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_N = 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Wiederkehrzeit t_w, nach der alle Teilchen wieder die Winkelkoordinate $\varphi_k = 0$ aufweisen, durch

$$t_w = \mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, N)\, T_0$$

gegeben ist. Hierbei ist $\mathrm{kgV}(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

b) Begründen Sie die Abschätzung

$$\mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, N) \;\geq\; \prod_{p \leq N} p\,,$$

wobei die rechte Seite das Produkt aller Primzahlen p kleiner gleich N bezeichnet. Für eine hinreichend glatte Funktion $f(p)$ (wie etwa $\ln p$) und hinreichend großes N gilt zudem die Näherung

$$\sum_{p \leq N} f(p) \;\approx\; \int_2^N f(x) \frac{1}{\ln x} dx\,.$$

(Die Summe läuft über alle Primzahlen kleiner gleich N.) Zeigen Sie damit, dass

$$t_w \approx T_0\, e^{N-2}.$$

Wie groß muss demnach N gewählt werden, damit eine Wiederkehr in den Anfangszustand innerhalb der nächsten 10 Millarden Jahre ausgeschlossen ist? Bestimmen Sie außerdem t_w für $N = 100$ bzw. 1000 und vergleichen Sie diese Zeiten mit dem Alter des Universums.