Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Zeynab Tavakoli

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 10 Lösungen

Wintersemester 2022/23

39. Lorentztrafo und Geschwindigkeitsaddition

a)

für $L_v^{-1} = L_{-v}$ kann man zeigen, dass $L_{-v}L_v = \mathbb{I}$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

$$L_{-v}L_v = \gamma_{-v}\begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}\gamma_v\begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \gamma_v^2\begin{pmatrix} 1-\frac{v^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 1-\frac{v^2}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

b)

Die Verkettung zweier spezieller Lorentztransformation L_u und L_v ergibt wieder eine Lorentztransformation.

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{3}$$

$$L_uL_v = \gamma_u\begin{pmatrix} 1 & \frac{-u}{c} \\ \frac{-u}{c} & 1 \end{pmatrix}\gamma_v\begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} = \gamma_u\gamma_v\begin{pmatrix} 1+\frac{uv}{c^2} & -\frac{u+v}{c} \\ -\frac{u+v}{c} & 1+\frac{uv}{c^2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= (1+\frac{uv}{c^2})\gamma_u\gamma_v\begin{pmatrix} 1 & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

betrachten wir $q = (1+\frac{uv}{c^2})\gamma_u\gamma_v$ und $q = \gamma_w$, daher $L_uL_v = L_w$.
Um die obige Aussage zu überprüfen, können wir die Definition von γ wie in der Gleichung 1 verwenden und seine Potenz 2 mit q^2 vergleichen,

$$\gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} \tag{6}$$

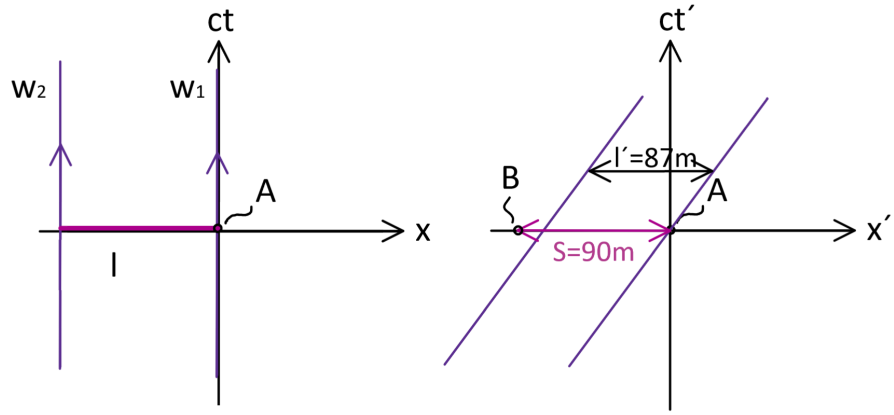
$$\gamma_w^2 = \frac{1}{1-\frac{w^2}{c^2}} = \frac{1}{1-(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}})^2\frac{1}{c^2}} = \frac{1}{1-(\frac{u+v}{c^2+uv})^2} \xrightarrow{c=1} \frac{1}{1-(\frac{u+v}{1+uv})^2} \tag{7}$$

$$= \frac{(1+uv)^2}{1+u^2v^2+2uv-u^2-v^2-2uv} = (1+uv)\frac{1}{1-u^2}\frac{1}{1-v^2} = q^2 \tag{8}$$

c)

$L_w = L_uL_v$transf. ins Ruhesystem des Geschoss. das sich daher mit Geschwindigkeit $w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{3}{8}}c = \frac{10}{11}c$ bewegt.

40. Schleuse
die beiden Systeme werden im Folgenden abgebildet,



Raumschiffsystem K Schleusensystem K'

Am **A**: Bug erreicht vorderes Schleusentor, das gerade schließt.
Am **B**: hinteres Schleusentor schließt.

$$w_1 = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{-v} w_1 = \gamma_v \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} = w_1' \tag{9}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} ct \\ -l \end{pmatrix} \Rightarrow L_{-v} w_2 = \gamma_v \begin{pmatrix} ct - \frac{vl}{c} \\ -l + vt \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} + \gamma_v \begin{pmatrix} -\frac{vl}{c} \\ -l \end{pmatrix} = (w_2')_0 = 0 \tag{10}$$

$$t = \frac{vl}{c^2} \Rightarrow (w_2')_1 = \gamma_v (\frac{v^2}{c^2} l - l) = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.l = -87m = -l' \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -l' \end{pmatrix} \in w_2' \tag{12}$$

daher passt!
41. Beschleunigungen
a)
$\Lambda_\phi \times \Lambda_\theta +$ Additionstheoreme$= \Lambda_{\phi+\theta}$

$$\Lambda_\phi \Lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\phi\cosh\theta + \sinh\phi\sinh\theta & -\cosh\phi\sinh\theta - \sinh\phi\cosh\theta \\ -\sinh\phi\cosh\theta - \cosh\phi\sinh\theta & \sinh\phi\sinh\theta + \cosh\phi\cosh\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\sinh\phi + \theta = \sinh\phi\cosh\theta + \cosh\phi\sinh\theta \tag{15}$$

$$\cosh\phi + \theta = \cosh\phi\cosh\theta + \sinh\phi\sinh\theta \tag{16}$$

$$\Rightarrow \Lambda_\phi \Lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cosh\phi + \theta & -\sinh\phi + \theta \\ -\sinh\phi + \theta & \cosh\phi + \theta \end{pmatrix} = \Lambda_{\phi+\theta} \tag{17}$$

b)

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{2} = \tanh\phi_0 \rightarrow \phi_0 = 0.55 \tag{18}$$

Beschleunigungen: $\Lambda_{\phi_n} = (\Lambda_{\phi_0})^n = \Lambda_{n\phi_0}$ (nach **a)**) d.h. $\phi_n = n\phi_0$

$$0.99c \Rightarrow n = \left[\frac{2.65}{0.55}\right] = 5 \tag{19}$$

$$0.999c \Rightarrow n = \left[\frac{3.80}{0.55}\right] = 7 \tag{20}$$

$$0.9999c \Rightarrow n = \left[\frac{5.0}{0.55}\right] = 10 \tag{21}$$

$$\tag{22}$$