Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Zeynab Tavakoli

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 14 Lösungen

Wintersemester 2022/23

56. Induktivität einer Spule

a)

$$B = \mu_0 N \frac{I}{l} \tag{1}$$

$$\Phi(t) = \pi r^2 \mu_0 N \frac{I(t)}{l} \tag{2}$$

$$U = -N\dot{\Phi} = -\pi r^2 \mu_0 N^2 \frac{\dot{I}}{l} \tag{3}$$

$$L = \frac{|U|}{\frac{dI}{dt}} \tag{4}$$

$$\Rightarrow L = \pi r^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

d.h. die Induktivität einer Spule kann mittels der Beziehung $L = \frac{\mu_0 N^2}{l}\pi r^2$ ermittelt werden. Diese Beziehung geht auf das Induktionsgesetz und die Formel für die magnetische Feldstärke im Inneren einer Spule zurück. Hierbei ist μ_0 die magnetische Permeabilität des Vakuums, N die Anzahl der Windungen der Spule, l die Länge der Spule und r der Radius der Spule.

b)

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2 \pi r^2 l \tag{7}$$

$$B = \mu_0 N \frac{I}{l} \tag{8}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{l}\pi r^2 I^2 \tag{9}$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \tag{10}$$

Oder

Um die magnetische Feldenergie im Inneren einer Spule zu berechnen, können wir die Induktionsspannung $U(t)$ und den dazugehörigen Strom $I(t)$ verwenden, die durch das Induktionsgesetz miteinander verbunden sind: $U(t) = -L\frac{d}{dt}I(t)$. Da die Induktionsspannung proportional zur Änderungsrate des Stroms ist, ist die Energie, die durch die Induktionsspannung bereitgestellt wird, proportional zur Integral der Induktionsspannung über die Zeit. Daher kann die magnetische Feldenergie W durch die folgende Integral berechnet werden:

$W = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)I(t)dt.$

Da die Induktionsspannung $U(t) = L\frac{d}{dt}I(t)$ ist, kann die Integrand in diesem Integral umgeschrieben werden:

$W = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} -L\frac{d}{dt}I(t)I(t)dt$

Partielle Integration, Ertrag

$W = \frac{1}{2}LI^2$

Daher ist die magnetische Feldenergie im Inneren der Spule gegeben durch die Formel $W = \frac{1}{2}LI^2$

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Berechnung unter Vernachlässigung von Randeffekten durchgeführt wurde und die Ergebnisse daher nur für eine ideale Spule gültig sind, die Randeffekten unterliegen.

c)

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I \tag{11}$$
$$I(0) = I_0 \tag{12}$$
$$\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{13}$$

d)

$$Q = \int_0^\infty RI(t)^2 dt \tag{14}$$
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{15}$$
$$\Rightarrow Q = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} dt \tag{16}$$
$$= RI_0^2(-\frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}|_0^\infty) = \frac{1}{2}LI_0^2 = W \tag{17}$$

57. Elektrische Feldstärke im Mikrowellenherd
a)

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{E} = \overrightarrow{e_3}\frac{E_0}{c}\cos(kx_1 - \omega t) \tag{18}$$
$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left|\overrightarrow{E}\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left|\overrightarrow{B}\right|^2 \tag{19}$$
$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \tag{20}$$
$$\Rightarrow u = \epsilon_0\left|\overrightarrow{E}\right|^2 \tag{21}$$
$$= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx_1 - \omega t) \tag{22}$$
$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} = uc\hat{u} \tag{23}$$
$$= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx_1 - \omega t)c\hat{u} \tag{24}$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\alpha + \frac{2\pi}{T}t)dt = \frac{1}{2} \tag{25}$$
$$\overline{\overrightarrow{S}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 c\hat{u} \tag{26}$$

b)

$$4\pi r^2\left|\overline{\overrightarrow{S}}\right| = p \tag{27}$$
$$\left|\overline{\overrightarrow{S}}\right| = \frac{c}{2}\epsilon_0 E_0^2 \tag{28}$$
$$E_0 = (\frac{p}{2\pi r^2\epsilon_0 c})^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$
$$= (\frac{1}{2\pi 8.85 \times 3}10^{3+2+12-8})^{\frac{1}{2}} V/m \tag{30}$$
$$= (6.0 \times 10^6)^{\frac{1}{2}} \approx 2.5 kV/m \tag{31}$$