Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Zeynab Tavakoli

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 2 Lösungen

Wintersemester 2022/23

6. Bewegung in zwei Dimensionen
a) Das zweite Newtonsche Gesetz besagt

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1}$$

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix} = m\ddot{\vec{r}} \tag{2}$$

$$k = m\omega^2 \tag{3}$$

Wenn wir die Gleichungen (1) und (2) zusammensetzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -kx \tag{4}$$

$$m\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = -4ky \tag{5}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \tag{6}$$

$$\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = -\frac{4k}{m}y = -4\omega^2 y = -(2\omega)^2 y \tag{7}$$

Es ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösung angibt, wie sich das Partikel bewegen kann. Die allgemeine Form der Lösung ist

$$x = x_1\cos\omega t + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t \tag{8}$$

$$y = x_2\cos 2\omega t + \frac{v_2}{2\omega}\sin 2\omega t \tag{9}$$

deshalb:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1\cos\omega t + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t \\ x_2\cos 2\omega t + \frac{v_2}{2\omega}\sin 2\omega t \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dabei sind x_1, x_2, v_1 und v_2 Werte, die von den Anfangsbedingungen des Problems abhängen, die noch nicht definiert sind.
b) $m = 1$, $k = 1$ und Anfangsbedingungen $\vec{r_0} = (0, 0)$ und $\vec{v_0} = (1, 1)$ bei $t = 0$.

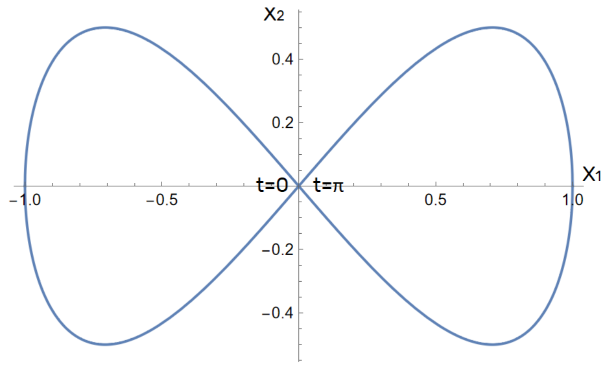
$$\omega = \sqrt{\frac{k=1}{m=1}} = 1 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad v_1 = 1 \qquad v_2 = 1 \tag{11}$$

Einsetzen dieser Anfangsbedingungen in die Gleichung 10:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$X_1 = \sin t \tag{13}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \pm X_1\sqrt{1 - X_1^2} \tag{14}$$



c) Nein!

7. Drehimpulserhaltung

Hier ist der Drehimpuls des Asteroiden konstant und bleibt erhalten.

$$L_{Aphel} = L_{Perihel} \tag{15}$$
$$mr_a^2\omega_a = mr_p^2\omega_p \tag{16}$$
$$\omega = \frac{v}{r} \tag{17}$$
$$\Rightarrow r_a v_a = r_p v_p \tag{18}$$
$$v_a = \frac{0.14AE}{2.43AE}110 = 6.33km/s \tag{19}$$

8. Schwerpunkt

a)

$$\overrightarrow{R} = \frac{\sum_{i=0}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum_{i=0}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=0}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}}{M} \tag{20}$$

b)

Nehmen wir an, der Schwerpunkt des Systems liegt im Ursprung. Hier N=2.

$$0 = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{21}$$
$$m_1|\overrightarrow{r_1}| = m_2|\overrightarrow{r_2}| \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{r_1}|}{|\overrightarrow{r_2}|} = \frac{m_2}{m_1} \tag{22}$$

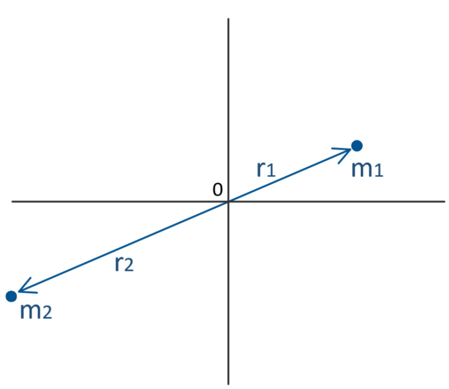


Figure 1: 8-b

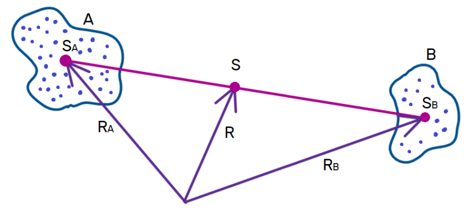


Figure 2: 8-c

c) Nehmen wir an, das ganze System (A und B) hat $N_A + N_B$ Partikel. Um das Schwerpunkt von System A zu berechnen, summieren wir über das erste Partikel bis zum N_A'ten Partikel, und für System B summieren wir über $N_A + 1$ bis zum $N_A + N_B$'ten Partikel. Betrachten wir zum Beispiel zehn Partikel, von denen sich sechs in System A und vier in System B befinden, so summieren wir bei der Berechnung des Schwerpunkt von System A über das erste bis zum sechsten Partikel und dann über das (sechs+1)-te Partikel bis zum zehnten Partikel, um den Schwerpunkt von System B zu berechnen.

$$\overrightarrow{R_A} = \frac{1}{M_A}\sum_{i=1}^{N_A} m_i \overrightarrow{r_i} \tag{23}$$

$$\overrightarrow{R_B} = \frac{1}{M_B}\sum_{i=N_A+1}^{N_A+N_B} m_i \overrightarrow{r_i} \tag{24}$$

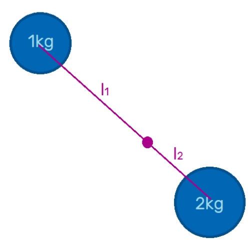
Summe der beiden Seiten der Gleichungen 23 und 24

$$M_A\overrightarrow{R_A} + M_B\overrightarrow{R_B} = \sum_{i=1}^{N_A} m_i\overrightarrow{r_i} + \sum_{i=N_A+1}^{N_A+N_B} m_i\overrightarrow{r_i} = \sum_{i=1}^{N_A+N_B} m_i\overrightarrow{r_i} \tag{25}$$

$$(M_A + M_B)\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{N_A+N_B} m_i\overrightarrow{r_i} \Rightarrow \overrightarrow{R} = \frac{1}{M_A+M_B}\sum_{i=1}^{N_A+N_B} m_i\overrightarrow{r_i} \tag{26}$$

d)

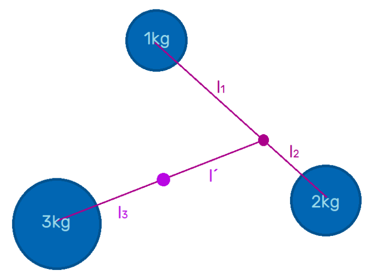
Zuerst zeigen wir den Schwerpunkt des 1kg und 2kg Systems



$$\frac{|\overrightarrow{r_1}|}{|\overrightarrow{r_2}|} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow l_1 = 2l_2 \tag{27}$$

dann können wir den Schwerpunkt des gesamten Systems aufzeigen

$$\frac{l_3}{l'} = \frac{3}{2+1} \Rightarrow l_3 = l' \tag{28}$$



e)

$$\frac{m_E}{m_M} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{81 m_M}{m_M} = \frac{60 - r_1}{r_1} \tag{29}$$

$$r_1 = \frac{60}{82} RE \approx \frac{3}{4} RE \tag{30}$$

9. Träge und schwere Masse

$$\overrightarrow{F_s}(r) = m_i \ddot{\overrightarrow{r}} \tag{31}$$

$$\overrightarrow{F_s}(r) = -\alpha(r) \mu_i \overrightarrow{e_r} \tag{32}$$

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = -R\omega_i^2 \overrightarrow{e_r} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \alpha(r)\mu_i \overrightarrow{e_r} = m_i R \omega_i^2 \overrightarrow{e_r} \tag{34}$$

$$\frac{\mu_i}{m_i} = \frac{R}{\alpha(r)} \omega_i^2 \tag{35}$$

$$\lambda_i = \frac{\mu_i}{m_i} \tag{36}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \frac{R}{\alpha(r)} \omega_i^2 \tag{37}$$

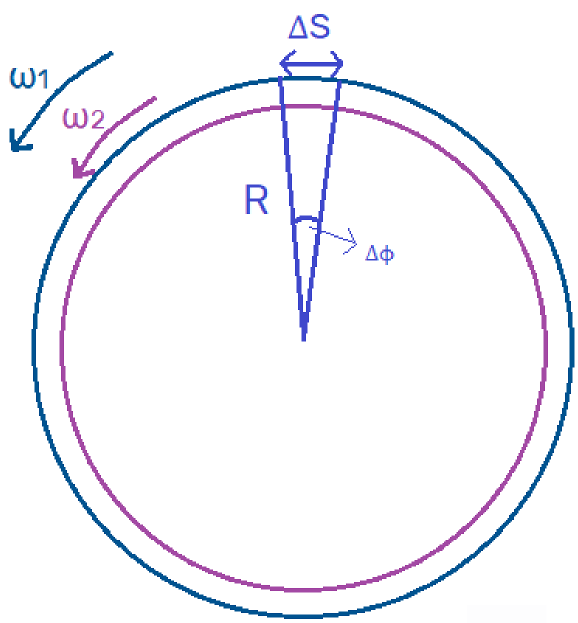
$$\epsilon = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1} = \frac{\left|\frac{R}{\alpha(r)}\omega_1^2 - \frac{R}{\alpha(r)}\omega_2^2\right|}{\frac{R}{\alpha(r)}\omega_1^2} = \frac{\left|\omega_1^2 - \omega_2^2\right|}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2}|\omega_1 - \omega_2|(\omega_1 + \omega_2) \tag{38}$$

für $\epsilon \ll 1$ wir haben: $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1$

$$\epsilon = \frac{2\omega_1}{\omega_1^2}|\omega_1 - \omega_2| = \frac{2}{\omega_1}|\omega_1 - \omega_2| \xrightarrow{\times \frac{T}{T}} = \frac{2}{\omega_1 T}|\omega_1 T - \omega_2 T| \tag{39}$$

wir nehmen $|\omega_1 T - \omega_2 T| = \Delta\phi$ und $\omega_1 T = 2\pi$

$$\epsilon = \frac{2}{2\pi}\Delta\phi = \frac{1}{\pi}\Delta\phi = \frac{1}{\pi}\frac{\Delta S}{R} \tag{40}$$


ΔS
ω1
ω2
R
Δϕ