Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Zeynab Tavakoli

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 4 Lösungen

Wintersemester 2022/23

16. Potenzialstufe

a)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in der xy-Ebene unter einer konservativen Kraft mit Potenzial

$$U_\epsilon(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{mu}{\epsilon}x, & 0 \le x \le \epsilon \\ -mu, & \epsilon < x \end{cases}$$

hier hat ϵ das Längenmaß.
Die Beziehung zwischen Potential und Kraft ist definiert als

$$\overrightarrow{F} = -grad\, U_\epsilon \tag{1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{mu}{\epsilon}\overrightarrow{e_x}, & 0 \le x \le \epsilon \\ 0, & \epsilon < x \end{cases} \tag{2}$$

Das Teilchen spürt keine Kraft für $x < 0$ und $\epsilon < x$, aber eine konstante Kraft (deren Wert nicht vom x-Wert abhängt) für $0 \le x \le \epsilon$.
für $0 \le x \le \epsilon$ mit $F \ne 0$ ist der Kraftstoß:

$$\Delta P = \int \overrightarrow{F} dt = \int \frac{mu}{\epsilon}\overrightarrow{e_x} dt = \frac{mu}{v_x}\overrightarrow{e_x} \tag{3}$$

b)

$$\overrightarrow{F_y} = -grad_y\, U_\epsilon = -\frac{\partial}{\partial y} U_\epsilon = 0 \tag{4}$$

$$\dot{P}_y = 0 \tag{5}$$

c)

Nach Energieerhaltungssatz:

$$E_{Initial} = E_{Final} \Rightarrow T_{Initial} + V_{Initial} = T_{Final} + V_{Final} \tag{6}$$

im Grenzfall $\epsilon \to 0$.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 - mu \tag{7}$$

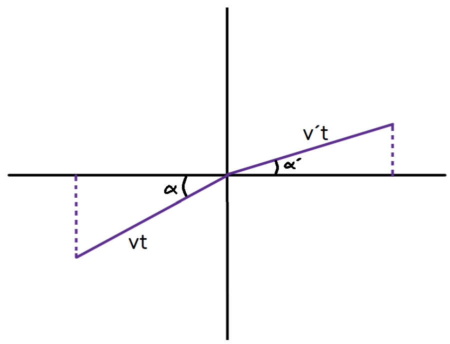
$$v^2 = v'^2 - 2u \Rightarrow \frac{v'}{v} = \sqrt{1 + \frac{2u}{v^2}} \tag{8}$$

nach der Abbildung unten können wir schreiben:

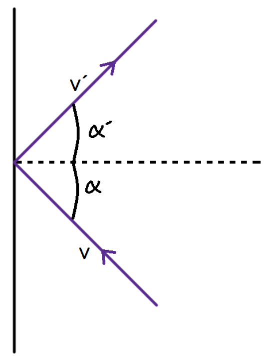
$$\sin\alpha = \frac{v_y t}{vt} \tag{9}$$

$$\sin\alpha' = \frac{v'_y t}{v' t} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v_y t}{v'_y t}\frac{v' t}{vt} \xrightarrow{v_y t = v'_y t} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v'}{v} = \sqrt{1 + \frac{2u}{v^2}} \tag{11}$$

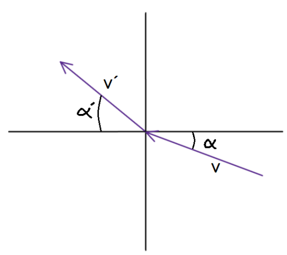


d)
Reflexion→ $\boldsymbol{E < 0}$



$$\dot{E} = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{v}|^2 = \left|\overrightarrow{v'}\right|^2 \tag{12}$$
$$\dot{P}_y = 0 \Rightarrow v_y = v'_y \tag{13}$$
$$\Rightarrow \alpha = \alpha' \tag{14}$$

Transmission→ $\boldsymbol{0 < E}$



$$v^2 - 2u = v'^2 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v'}{v} = \sqrt{q - \frac{2u}{v^2}} \tag{15}$$

17. Minimaler Abstand
Drehimpulserhaltung:

$$\overrightarrow{L}_{Initial} = \overrightarrow{L}_{Final} \tag{16}$$
$$\overrightarrow{r}_{Initial} \times \overrightarrow{P}_{Initial} = \overrightarrow{r}_{Final} \times \overrightarrow{P}_{Final} \tag{17}$$
$$d|\overrightarrow{v}|\sin 90 = d'\left|\overrightarrow{v'}\right|\sin 90 \xrightarrow[v=|\overrightarrow{v}|]{v'=\left|\overrightarrow{v'}\right|} dv = d'v' \tag{18}$$

Energieerhaltung:

$$E_{Initial} = E_{Final} \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_E}{r} = \frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{mm_E}{d'} \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{m_E}{r} = \frac{1}{2}v'^2 - G\frac{m_E}{d'} \tag{21}$$

von Gleichung (18):$v' = v\frac{d}{d'}$

$$1 - 2G\frac{m_E}{rv^2} = \frac{d^2}{d'^2} - 2G\frac{m_E}{v^2 d'} \tag{22}$$

wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit d'^2

$$d'^2(1 - 2G\frac{m_E}{rv^2}) = d^2 - 2G\frac{m_E d'}{v^2} \tag{23}$$

$$d'^2(1 - 2G\frac{m_E}{rv^2}) + 2G\frac{m_E d'}{v^2} = d^2 \tag{24}$$

Für r und v hinreichend groß ist $1 - \frac{2Gm_E}{rv^2} \approx 1$

$$d'^2 + 2\frac{\beta d'}{v^2} = d^2 \tag{25}$$

mit $\beta = Gm_E$, können wir das so schreiben:

$$(d' + \frac{\beta}{v^2})^2 = d^2 + \frac{\beta^2}{v^4} \Rightarrow d' = -\frac{\beta}{v^2} + \sqrt{d^2 + \frac{\beta^2}{v^4}} \tag{26}$$

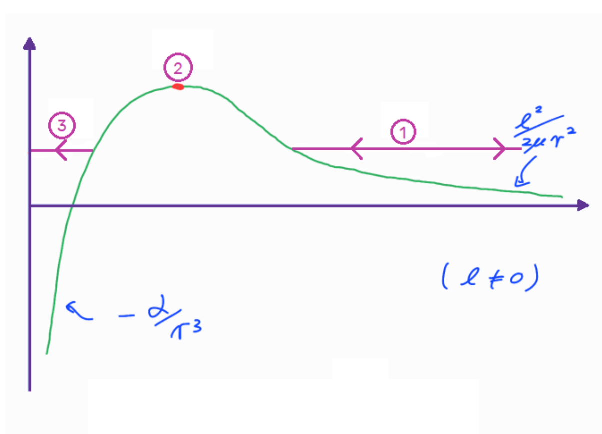
18. Gravitation

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\beta}{r^4} \Rightarrow u = -\frac{\alpha}{r^3} \tag{27}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{3} \tag{28}$$

$$\Rightarrow u_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r^3} \tag{29}$$

für weitere Details lesen Sie bitte v7



Der Breich 1:$r(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty$
Der Breich 2:Instabile kreisbahn
Der Breich 3:$r(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$