Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Zeynab Tavakoli

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 5 Lösungen

Wintersemester 2022/23

19. Teilchen auf einer Tischplatte
Wir beginnen mit der Drehimpulserhaltung.

$$\vec{L}_{Initial} = \vec{L}_{Final} \tag{1}$$
$$md^2\omega = md'^2\omega' \tag{2}$$
$$md^2\omega = m(\frac{d}{2})^2\omega' \tag{3}$$
$$\omega' = 4\omega \tag{4}$$

(für weitere Details lesen Sie bitte v7, seite 1-2)

$$\vec{F}(t) = F(t)\vec{e_r} \tag{5}$$
$$F(t) = \begin{cases} -md\omega^2, & t \leq 0 \\ -md'\omega'^2, & t_1 \leq t \end{cases} \Rightarrow F(t) = \begin{cases} -md\omega^2, & t \leq 0 \\ -m\frac{d}{2}(4\omega)^2 = -8md\omega^2, & t_1 \leq t \end{cases} \tag{6}$$
$$\Rightarrow F(t_1) = 8F(0) \tag{7}$$

20. Fermatsches Prinzip zu Fuß

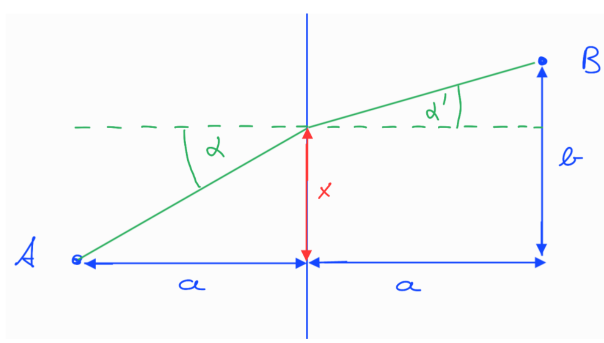
$$T(x) = n(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + n'((b-x)^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Minimierung von $T(x)$ durch geeignete Wahl von x, bedeutet: $\frac{d}{dx}T(x) = 0$

$$T'(x) = n\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + n'\frac{1}{2}\frac{-2(b-x)}{((b-x)^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = n\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} - n'\frac{b-x}{((b-x)^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{9}$$

auf der Abbildung unten:

$$\sin\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{10}$$
$$\sin\alpha' = \frac{b-x}{((b-x)^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n} \tag{12}$$



21. Fermatsches Prinzip mit Euler und Lagrange
a)
Lagrange-Funktion

$$L(f, f') = (n_0 + \lambda f)\sqrt{1 + f'^2} \xrightarrow{\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x} (n_0 + \lambda f)(1 + \frac{1}{2}f'^2) \tag{13}$$
$$= n_0 + \frac{n_0}{2}f'^2 + \lambda f + \frac{\lambda f}{2}f'^2 = n_0 + \frac{n_0}{2}f'^2 + \lambda f \tag{14}$$

$\frac{\lambda f}{2}f'^2$ ist vernachlässigbar.
b)

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f}(n_0 + \frac{n_0}{2}f'^2 + \lambda f) = \lambda \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\partial}{\partial f'}(n_0 + \frac{n_0}{2}f'^2 + \lambda f) = n_0 f' \tag{16}$$

Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}(f_0(x), f_0'(x)) = \frac{\partial L}{\partial f}(f_0(x), f_0'(x)) \tag{17}$$
$$\lambda = \frac{d}{dx}n_0 f_0'(x) = n_0 f_0''(x) \tag{18}$$

c)

$$n_0 f_0''(x) = \lambda \tag{19}$$
$$f_0''(x) = \frac{\lambda}{n_0} \tag{20}$$
$$\frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} = \frac{\lambda}{n_0} \tag{21}$$
$$\iint d^2 f_0(x) = \iint \frac{\lambda}{n_0}dx^2 \tag{22}$$
$$f_0(x) = \alpha + \beta x + \frac{\lambda}{2n_0}x^2 \tag{23}$$

Aus Gleichung (23) kann man ersehen, dass sie die Form einer Parabel hat.