Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Rochus Klesse
Christopher Max

Theoretische Physik I
6. Übung - Lösung

Wintersemester 22/23

23 Bewegung auf dem Zylinder

a) Betrachte die Bewegung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), wobei z die Koordinate entlang der Zylinderachse bezeichnet, φ den Winkel auf dem Zylinder beschreibt und $r \equiv R$. Dann gilt für die kinetische Energie T und das Potential U:

$$T(\dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{z}^2+R^2\dot{\varphi}^2),\ U(\varphi, z) = mRg\cos(\varphi)\ \Rightarrow\ L = T-U = \frac{m}{2}(\dot{z}^2+\dot{\varphi}^2),\ U(\varphi, z) = mg\cos(\varphi).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten damit

$$0 = m\ddot{z}, \quad 0 = R\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi)$$

b) Die Bewegung entspricht der eines Pendels, $\dot{z} = konst.$, welches sich mit konstanter Geschwindingkeit entlang der Achse des Zylinders bewegt.

c) Für $g = 0$ gilt $\dot{z} = konst.$ und $\dot{\varphi} = konst.$. Die Masse kreist somit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung und bewegt sich gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Zylinderachse.

24 Schiefe Ebene

Wähle die kart. Koordinaten x, y so, dass die Neigung nur entlang der y-Komponente liegt. Die kinetische Enrgie ist dann $T(x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ und das Potential ist $U(\dot{x}, \dot{y}) = mg\sin(\alpha)y$. Somit gilt

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\sin(\alpha)y.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$0 = m\ddot{x}, \quad 0 = \ddot{y} + g\sin(\alpha).$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet

$$x(t) = v_{0,x} + x_0,\ y(t) = y_0 + v_{0,y}t - \frac{g}{2}\sin(\alpha)t^2.$$

25 Pendel

Die Bewegung wird nur durch den Winkel φ zwischen der senkrechten Achse und der Stange bestimmt. Es gilt $(x_1, y_1) = l_1(-\sin(\varphi), -\cos(\varphi)), (x_2, y_2) = l_2\big(\sin(\varphi), \cos(\varphi)\big)$. Daraus folgt

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}^2, \quad U(\varphi) = -m_1 g l_1 \cos(\varphi) + m_2 g l_2 \cos(\varphi).$$

Somit gilt

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 g l_1 \cos(\varphi) - m_2 g l_2 \cos(\varphi).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$0 = (m_1 g l_1 - m_2 g l_2) \sin(\varphi) + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = g \frac{m_1 l_1 - m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \sin(\varphi).$$

Diese Bewegungsgleichung entspricht der eines Pendels. Für $l_1/l_2 = m_2/m_1$ gilt $\ddot{\varphi} = 0$, d.h. das System bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.