

Theoretische Physik I (Lehramt) – Blatt 5 Lösungen

Wintersemester 2022/23

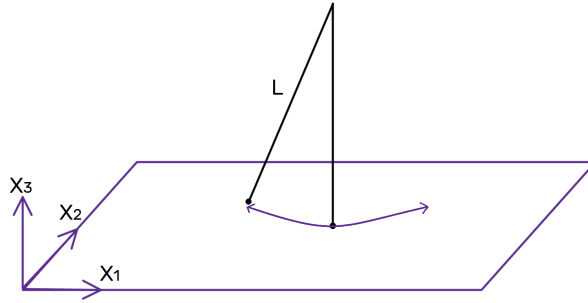
27. Foucaultsches Pendel

a)

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1)$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \text{Corioliskraft} + \text{Zentrifugalkraft} \quad (2)$$

Ohne Corioliskraft, 2D harmonische Schwingung mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$



$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Für die Corioliskraft:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (4)$$

wobei $\vec{\Omega} = \Omega \hat{n}$ und $\vec{r}$ der Koordinatenvektor der Pendelmasse bzgl. eines erdfesten Systems ist.

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega_3 = \Omega \sin \alpha \quad (5)$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\vec{F}_c = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \sin \alpha \\ -\dot{x}_1 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 2m\Omega_3 \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Deshalb,

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2\Omega_3 \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

b)

Für $\Omega \ll \omega$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a \vec{u}(t) \cos \omega t \quad (9)$$

mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t \quad (11)$$

Um die Form von Gleichung 8 zu erhalten, müssen wir die zweite zeitliche Ableitung der obigen Gleichung nehmen.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} -\Omega_3 \sin \Omega_3 t \\ -\Omega_3 \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t - \omega \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t \right] \quad (12)$$

$$= -a \left[\Omega_3 \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t + \omega \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t \right] \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -a \left[\Omega_3^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t - \Omega_3 \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t \right. \quad (14)$$

$$\left. - \Omega_3 \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t + \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t \right] \quad (15)$$

Für $\Omega \ll \omega$ können wir den Term mit Ω^2 vernachlässigen.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -a \left[-2\Omega_3 \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t + \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t \right] \quad (16)$$

Wir müssen die Gleichungen 11 und 13 in Gleichung 8 einsetzen und das Ergebnis mit Gleichungen 16 vergleichen.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 a \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t + 2\Omega_3 \left(-a \left[\Omega_3 \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t - \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t \right] \right) \quad (17)$$

wieder vernachlässigen wir den Term mit Ω^2 ,

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 a \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t + 2a\Omega_3 \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (18)$$

$$= -a \left[-2\Omega_3 \omega \begin{pmatrix} \sin \Omega_3 t \\ \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \sin \omega t + \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t \end{pmatrix} \cos \omega t \right] \quad (19)$$

Nun sehen wir, dass Gleichung 19 und 16 gleich sind.

c)

90 Grad Drehung = $\frac{\pi}{2}$ Drehung

Ort geografischen Breite α des Kölner Doms = 50

$$\Omega_3 = \Omega \sin \alpha \quad (20)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{24h} \quad (21)$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\Omega_3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} \cdot 24h \cdot \frac{1}{\sin 50} = \frac{6h}{\sin 50} = 7.8h \quad (22)$$

28. Fall eines Apfels

a)

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (23)$$

$$= -2m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} \cos \alpha \dot{z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -2\Omega \cos \alpha \dot{z} \vec{e}_1 \quad (25)$$

Da a in der obigen Gleichung einen positiven Wert hat ($-2\Omega \cos \alpha \dot{z} \geq 0$), können wir schließen, dass der Apfel nicht genau senkrecht fällt, sondern etwas in östliche Richtung abgelenkt wird.

b)

Ungestörter Fall: $\dot{z} = -gt$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} \quad (26)$$

$$\vec{a} = 2g\Omega_2 t = \ddot{x}_1(t) \quad (27)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t) = g\Omega_2 t^2 \quad (28)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = g\Omega_2 \frac{t^3}{3} \quad (29)$$

$$H = g\frac{T^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (30)$$

$$\Delta s = x_1(T) = \frac{g\Omega_2}{3} \left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{H^3}{g}} \Omega \cos \alpha \quad (31)$$

$$H = 15m \quad g = 10m/s^2 \quad \Omega = \frac{2\pi}{24h} = 7.3 \times 10^{-5} s^{-1} \quad \alpha = 50^\circ \quad (32)$$

$$\Rightarrow \Delta s = 0.81mm \quad (33)$$

29. Hamilton-Funktion in Polarkoordinaten

a)

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - u(r, \phi) \quad (34)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (35)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = L_z (\text{Drehimpuls}) \quad (36)$$

b)

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \dot{r}p_r + \dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + u(r, \phi) \quad (37)$$

c)

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2} + u(r, \phi) \right) \quad (38)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial \phi} u(r, \phi) \quad (39)$$