Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Rochus Klesse
Christopher Max

Theoretische Physik I
9. Übung - Lösung

Wintersemester 18/19

28 Harmonischer Oszillator

Die kinetische Energie ist gegeben durch $T(\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2$. Damit gilt

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2.$$

Der Impuls ist gegeben durch $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$. Daraus folgt

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$0 = m\ddot{q} + kq \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{k}{m}q.$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lautet

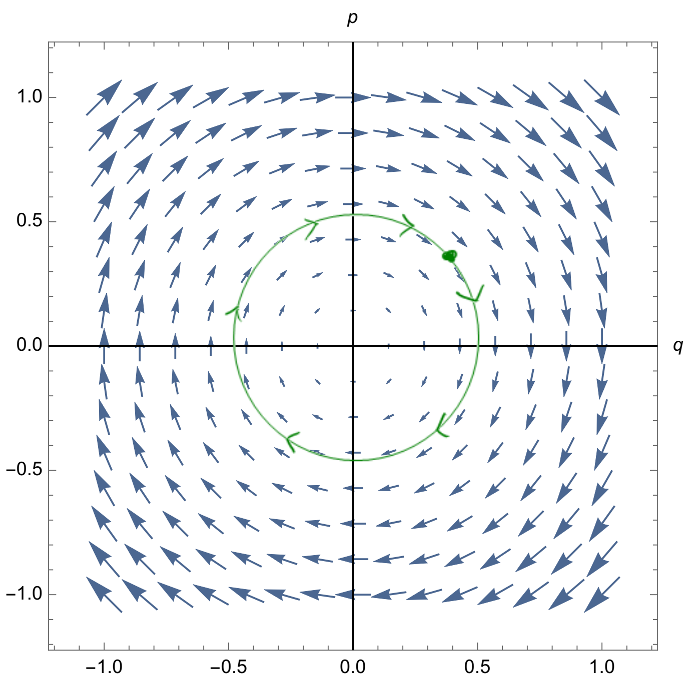
$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \, \dot{p} = -kq \, \Rightarrow m\ddot{q} = -kq.$$

Die Hamiltonschen Gleichungen sind somit äquivalent zu der Euler-Lagrange-Gleichung.

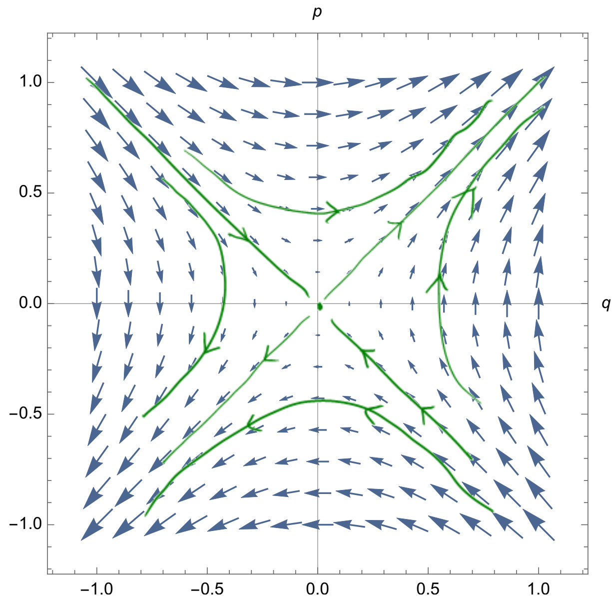
29 Hamiltonscher Fluss und der Satz von Liouville

a) Das Hamiltonsche Vektorfeld ist gegeben durch

$$V(q,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -kq \end{pmatrix}.$$

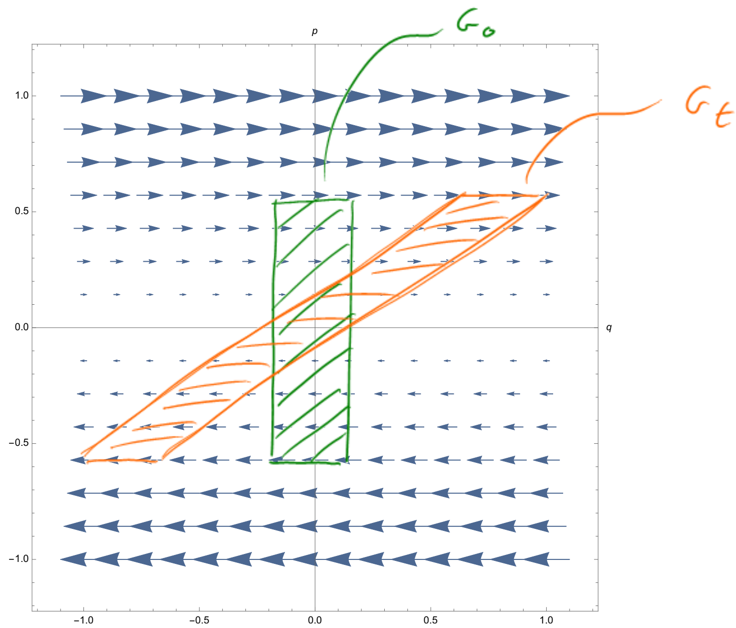

p
q
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

b)



c) Ein freies Teilchen hat die Hamiltonsche Funktion $H = \frac{p^2}{2m}$. Das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld ist gegeben durch

$$V(q,p) = \begin{pmatrix} pm \\ 0 \end{pmatrix}.$$



30 Wiederkehrzeit

a) Das k-te Teilchen ist in seinen Anfangszustand zurück zu zeiten. die ganzzahlige (positiven) Vielfache von T_k sind, also $m \cdot T_k$ mit $m \in \mathbb{N}$.
   Für alle Zahlen von 1 bis N erfüllt das kleinste gemeinsame Vielfache diese Bedingung, da sich das kgV für alle k als $\tilde{m} \cdot T_k$ schreiben lässt. Wird nur einer der Primfaktoren im kgV weggelassen, ist die Bedingung für mindestens ein k nicht mehr erfüllt.

b) Das kgV$\{1, \ldots, N\}$ kann als Produkt aller Primfaktoren (in entsprechender Potenz) zwischen 1 und N dargestellt werden. Dabei sind natürlich auch alle Primzahlen im Intervall $[1,N]$ vorhanden. Daraus folgt die genannte Abschätzung. Damit ergibt sich:

$$\mathrm{kgV}\{1, \ldots, N\}) \geq \sum_{p \text{ prim}, p \leq N} p.$$

Insbesondere gilt, da der Logarithmus streng monoton steigend ist:

$$\ln(\mathrm{kgV}\{1, \ldots, N\}) \geq \sum_{p \text{ prim}, p \leq N} \ln p$$

$$\approx \int_2^N \ln x \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x = N - 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{kgV}\{1, \ldots, N\} \gtrsim e^{N-2}$$
$$\Rightarrow \quad t_w \gtrsim T_0 e^{N-2}$$

Wir nehmen $T_0 = 1s$ an. Aus der Annahme $t_w \geq 10^{10} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s$ folgt damit $N \geq 41$.

Umgekehrt gilt für $N = 100$

$$t_w = e^{98}s = 3,6 \cdot 10^{42}s$$

und für $N = 1000$

$$t_w = e^{998}s = 2.7 \cdot 10^{433}s.$$