

Äquivalente Formulierung der Newtonschen Mech. mittels Hamiltonschen Prinzips

Fermat: "Licht nimmt Weg geringster Laufzeit!"

Hamilton: "Teilchen nimmt Weg geringster Wirkung!"

(grob)

genauer am Bsp. eines Teilchens im kons.

Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r})$;

Bahn $\vec{r}(t) = ?$

Newton: $\vec{r}(t)$ genügt Bewegungsgl.

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad !$$

Hamilton:

Von allen möglichen Bahnen $\vec{r}(t)$ mit

$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$ nimmt das

Teilchen genau die Bahn $\vec{r}_0(t)$, an

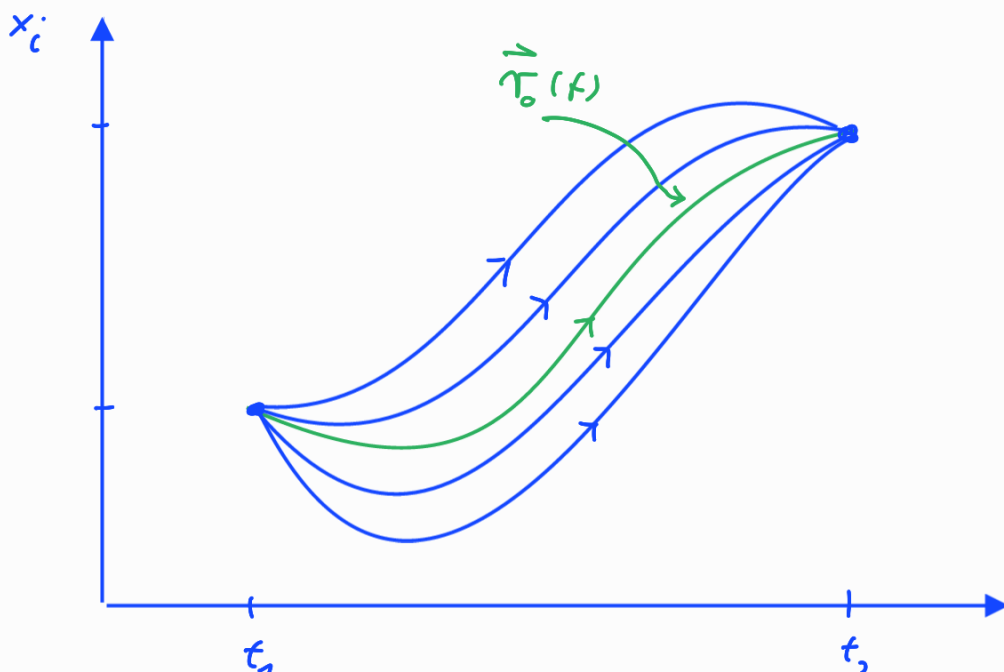
der die Wirkung

$$S[\vec{r}] := \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) dt$$

ein Minimum, Maximum oder einen
Sattelpunkt aufweist. Hierbei ist

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) &= T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}) \\ &= \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - U(\vec{r}). \end{aligned}$$

„Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung“



die Äquivalenz von Hamilt. Prinzip und Newt.

Beweg.gl. sieht man wie folgt:

- Wirkung $S[\vec{r}]$ ist in $\vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$
stationär (d.h. $\vec{r}_0(t)$ ist Min., Max. oder
Sattelpunkt von $S[\vec{r}]$)

$\Leftrightarrow$ die Koordinaten $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$
genügen den jeweiligen Euler-Lagrange-
Glen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\vec{r}_0(t), \dot{\vec{r}}_0(t)) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{r}_0(t), \dot{\vec{r}}_0(t)) ,$$

$$\text{d.h.} \quad m \ddot{x}_i(t) \stackrel{!}{=} - \frac{\partial U(\vec{r}_0(t))}{\partial x_i}$$

$\Leftrightarrow$ $\vec{r}_0(t)$ genügt der Newt. Bew.Gl.

$$m \ddot{\vec{r}}_0(t) \stackrel{!}{=} \vec{F}(\vec{r}_0(t))$$

hilfreich: Hamiltonsches Prinzip gilt

in beliebigen Koordinaten $q = \phi(\vec{r})$

solange

$$L_q(q, \dot{q}) \stackrel{!}{=} T(q, \dot{q}) - V(q)$$

↑
kinetische
Energie !

↑
potenzielle
Energie !

denn denn $L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \stackrel{!}{=} L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))$

und somit

$S[\vec{r}]$ stationär in $\vec{r}_0(t)$

$\Leftrightarrow$

$S_q[q]$ stationär in $q_0(t) = \phi(\vec{r}_0(t))$



Hamiltonsches Prinzip

Teilchenbahn $q_0(t) \stackrel{!}{=} \underline{\text{stationäre Funktion}}$ der
Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

mit $L = T - V$ und Randbedingungen
 $q(t_1) = q^{(1)} \quad q(t_2) = q^{(2)}$

→ $q_0(t)$ genügt den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t)) \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q_i}(q_0(t), \dot{q}_0(t))$$

Beispiel:

Teilchen in Ebene, Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(|\vec{r}|) ;$$

→ verwende Polarkoordinaten $q = (r, \varphi)$

$$\rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \underbrace{\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)}_T - \underbrace{U(r)}_V$$


Variablen!

Konvention:

$$q_0(t) = (r(t), \varphi(t)) \equiv (r, \varphi)$$
$$\dot{q}_0(t) = (\dot{r}(t), \dot{\varphi}(t)) \equiv (\dot{r}, \dot{\varphi})$$

↖ ↙ Funktionen
 $[t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$

E.L.G. bzgl. φ :

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}} = 0, \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}} = m \underline{\underline{r^2 \dot{\varphi}}}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (m \underline{\underline{r^2 \dot{\varphi}}})$$

d.h. $\mathcal{L} := m r^2 \dot{\varphi}$ ist Erhaltungsgröße!
(Drehimpuls)

E.L.C. bage. r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$\stackrel{\varphi = l/mr^2}{=} \frac{l^2}{m r^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + U(r)}_{\equiv U_{\text{eff}}(r)} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m \ddot{r}$$

$$\rightarrow m \ddot{r} = - \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{eff}}(r)$$

d.h. $r(t) \hat{=}$ Bahn eines 1D Teilchens im
eff. Pot. $U_{\text{eff}}(r)$.

(wie zuvor ✓)

