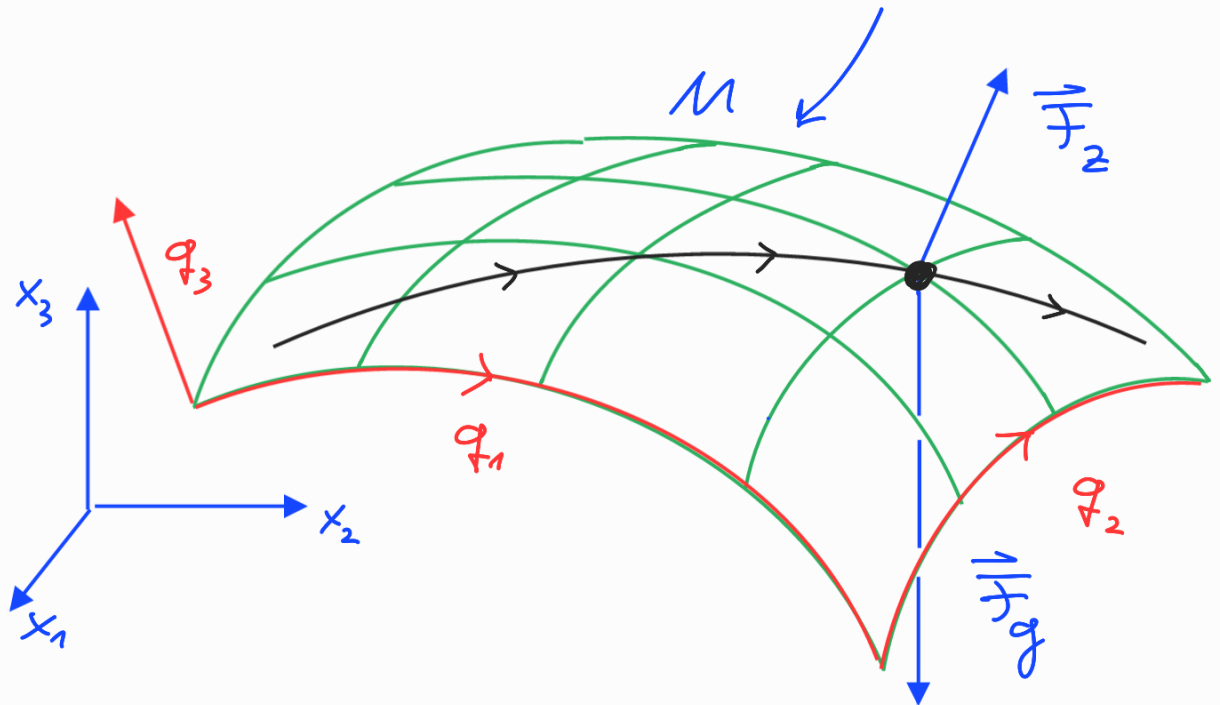


Bewegung unter Zwangsbedingungen

am Bsp. eines Teilchens auf Zwangsfläche



Idee: wähle coord. $q = (q_1, q_2, q_3)$

so, dass

$$q \in M \quad \Leftrightarrow \quad q_3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow q_0(t) = (q_1(t), q_2(t), \underline{0})$$

$$\dot{q}_0(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \underline{0})$$

→ benötigen $L = T - V$ und ELGen
nur in den unabhängigen Koordinaten $q = (q_1, q_2)$ (und $q_3 \stackrel{!}{=} 0$) !

→ Rezept "Lagrange-Formalismus" :

(i) wähle unabhängige Koordinaten

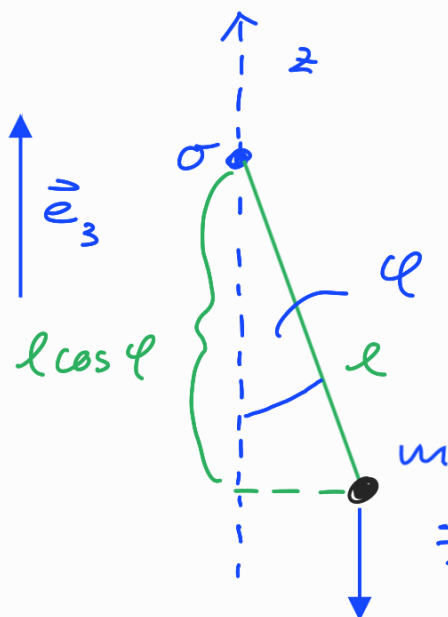
$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

(ii) bestimme $L = T - V$ in q und $\dot{q}$

(iii) stelle ELGen auf

(iv) löse ELGen $\leadsto q(t)$

Beispiel : mathematisches Pendel :



(i) $q = \varphi$!

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_3 = -\text{grad}(mgz)$$

(ii)

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - m g z(\varphi)$$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l \cos \varphi$$

$$z(\varphi) = -l \cos \varphi$$

(iii)

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}}_{\parallel} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

$$\frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\varphi}) = m l^2 \ddot{\varphi}$$

d.h. $\ddot{\varphi}(t) = -g/l \sin \varphi(t)$

(iv) für kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi}(t) = -g/l \varphi$$

$$\rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\hookrightarrow \omega = \sqrt{g/l}$$

