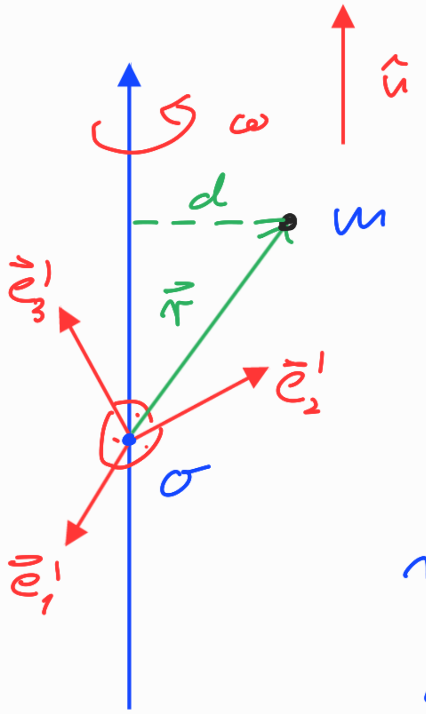
# Rotierendes Bezugssystem: Coriolis-Kraft




$$B' = (\sigma, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$$

ONB $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ rotiert mit konstanter Winkelfrequenz $\omega$ um Achse $\hat{u}$ durch $\sigma$

Ortsvektor des Massenpkts:

$$\vec{r} = x_1{}' \vec{e}_1{}' + x_2{}' \vec{e}_2{}' + x_3{}' \vec{e}_3{}'$$

$\rightarrow$ Koordinatenvektor des MPs bzgl. $B'$:

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix}$$

$\vec{r}\,'(t)$ genügt

$$m \ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}\,' + \vec{F}_s{}'$$

Scheinkraft $\neq 0$, da $B'$ nicht inertial!

wir ermitteln $\vec{F}_s'$ mittels Lagrange-Formalismus:

unabhängige Koordinaten:

$$q = \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

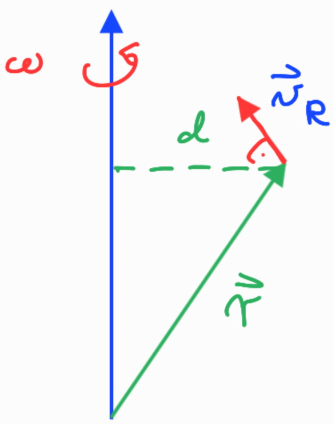
Lagrange-Fkt: $L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = T(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') - \cancel{U(\vec{r}\,')}$

setze $\vec{F}\,' = \vec{0}$

kinetische Energie:

$$T(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{r}}\,' + \vec{v}_R \right|^2$$

wobei $\vec{v}_R$ Geschw. des MPs aufgrund Rotation mit Winkelgeschw. $\omega$ um $\hat{n}$:




$$\boxed{\vec{v}_R = d \cdot \omega \, \vec{e}_\varphi \overset{!}{=} \underbrace{\vec{\omega}}_{=\omega \cdot \hat{n}} \times \vec{r}}$$

in Komponenten bzgl. $B'$:

$$\vec{v}_R\,' = \vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,'$$

→

$$\rightarrow \quad L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = T(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,' \right|^2$$

hieraus folgt mit etwas Rechnen (s.u.):

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_\ell} = m \left( \ddot{x}'_\ell + (\vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,')_\ell \right)$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial L}{\partial x'_\ell} = - m \left( \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,' \right)_\ell - m \left( \vec{\omega}\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{r}\,') \right)_\ell$$

die EL Gen $\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_\ell} = \frac{\partial L}{\partial x'_\ell}, \quad \ell = 1, 2, 3$

sind damit gleichbedeutend mit

$$m \ddot{\vec{r}}\,' = \underbrace{- 2m\, \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,'}_{\text{Coriolis-Kraft}} \underbrace{- m\, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

$$\boxed{\vec{F}'_c = - 2m\, \vec{\omega}\,' \times \dot{\vec{r}}\,'}$$

Berechnung von (i) und (ii) mittels Levi-Civita Symbol $\varepsilon_{ijk} \overset{(*)}{:=} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \times \vec{e}_k \rangle$ und

Einsteinsche Summenkonvention (über doppelte Indizes wird summiert):

$$\varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,x_k \equiv \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,x_k$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \langle \vec{e}_i\,,\ \omega_j \vec{e}_j \times (x_k \vec{e}_k) \rangle$$

$$= \left( (\vec{\omega} \times \vec{r})_i \right)$$

$$\rightsquigarrow \quad L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \left( \dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,x_k \right)^2$$

(i): $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \frac{d}{dt} m\left( \dot{x}_l + \varepsilon_{ljk}\,\omega_j\,x_k \right)$$

$$= m\,\ddot{x}_l + \varepsilon_{ljk}\,\omega_j\,\dot{x}_k$$

$$= m\left( \ddot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \right)_l$$

(ii): $$\frac{\partial L}{\partial x_l} = m \sum_i \left( \dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,x_k \right) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{ij'k'}\,\omega_{j'}\,x_{k'}}_{= \varepsilon_{ij'l}\,\omega_{j'}} \longrightarrow$$

mit $\varepsilon_{ij'l} = -\varepsilon_{lj'i}$ folgt

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = -m\, \varepsilon_{lj'i}\, \omega_{j'}\, \dot{x}_i - m\, \varepsilon_{lj'i}\, \omega_{j'}\, \varepsilon_{ijk}\, \omega_j\, x_k$$

$$= -m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})_l - m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right)_l$$

$\boxed{///}$

# Hamiltonsche Mechanik

**Newton:** $\quad m\, \ddot{\vec{r}}_i(t) \overset{!}{=} \vec{F}_i(t)$

$\uparrow$

kartesische Koordinaten bzgl. Inertialsystem

**Lagrange:** beliebige unabhäng. Koordinaten

$q = (q_1, \dots, q_n)$ ; Bahn $q(t)$

genügt ELGen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t))$$

$\uparrow$

n DGLen 2. Ordnung zur Bestimmung von $q(t)$

## Hamilton:

Zustand $x(t) = (q(t), p(t))$

$n$ Koordin. $q = (q_1, \dots, q_n)$

$n$ verallg. Imp. $p = (p_1, \dots, p_n)$

genügt Hamiltonsche Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} 2n \text{ DGlen} \\ 1. \text{ Ordnung} \\ \text{für } x(t) \end{array}$$

mit geeignet konstruierter Hamilton-Funktion

$$H : (q, p) \longmapsto H(q, p)$$

## konkret:

Ausgangspunkt: Lagrangesche Mechanik:

- unab. Koord. $q = (q_1, \dots, q_n)$
- Lagrange-Fkt. $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$

$\rightarrow$ Hamiltonsche Mechanik in zwei Schritten:

$\rightarrow$

(i) Transformation

$$(q, \dot{q}) \longleftrightarrow (q, p(q, \dot{q}))$$

gemäß

$$\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q})}$$

verallgemeinerter Impuls

(ii) Hamilton-Funktion

$$\boxed{H(q, p) := \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(q, p)\, p_i - L(q, p)}$$

wir zeigen nun: genügt $q(t)$ den Euler-Lagrange-Glen, so genügt auch

$$q(t), \quad p(t) := p(q(t), \dot{q}(t))$$

den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \quad ; \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t))$$

$q(t)$ sei Lsg. der ELGen;

$$\rightarrow \underline{\frac{\partial H}{\partial q_j}}\left(q(t), p(q(t), \dot q(t))\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \dot q_i(q,p)\, p_i - L(q, \dot q(q,p))\right)$$

$$= \sum_i \cancel{\frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j}\, p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{= p_i} \frac{\partial \dot q_i}{\partial q_j}}$$

$$= - \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{= p_j} = \underline{- \dot p_j} \; ;$$

$q(t)$ Lsg. der ELGen

$$\underline{\frac{\partial H}{\partial p_j}} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_i \dot q_i(q,p)\, p_i - L\right)$$

$$= \underline{\dot q_j} + \sum_i \cancel{\frac{\partial \dot q_i(q,p)}{\partial p_j}\cdot p_i} - \sum_i \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{= p_i} \cdot \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_j}} \qquad \blacksquare$$

Aufgrund Eindeutigkeit der Lösungen gilt dann auch die Umkehrung.

**Beispiel:** Teilchen im kons. Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r})$$

$$q = (q_1, q_2, q_3) \equiv \vec{r}$$

$$\rightsquigarrow \quad L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{q}}|^2 - U(q)$$

$$\rightsquigarrow \quad p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i \quad \rightsquigarrow \quad \dot{q}_i(p) = p_i / m$$

und somit

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i(p)\, p_i - L(\vec{q}, \vec{p}/m)$$

$$= \frac{|\vec{p}|^2}{m} - \frac{m}{2} \left| \frac{\vec{p}}{m} \right|^2 + U(\vec{q})$$

$$= \underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m}}_{T(\vec{p}):\ \text{kinetische Energie}} + U(\vec{q}) \overset{!}{=} \text{Gesamtenergie!}$$

$$\boxed{H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{m} + U(\vec{q})}$$

Hamiltonsche Gleichungen:

$$\dot{p}_i \overset{!}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U(\vec{q})}{\partial q_i} = F_i \quad \checkmark$$

$$\dot{q}_i \overset{!}{=} \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i/m \quad \checkmark$$