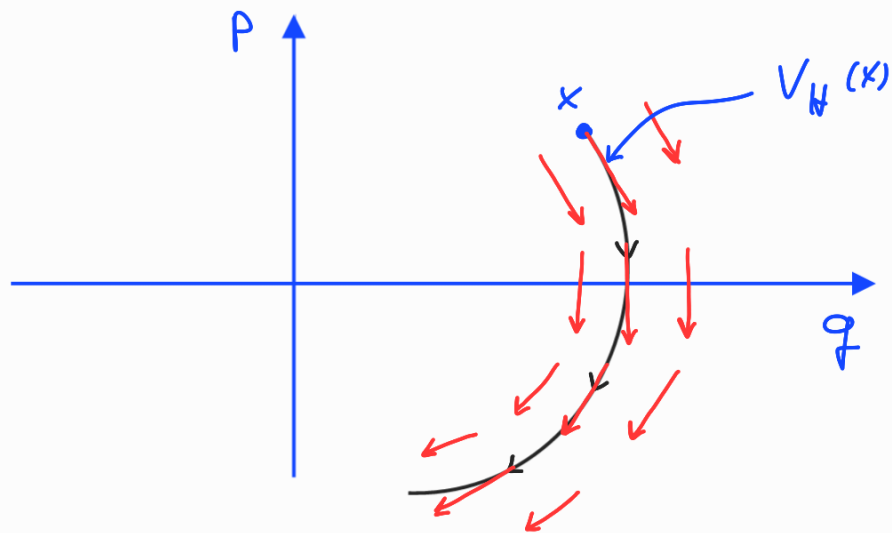


Hamiltonsches Vektorfeld

$$V : X = (q, p) \mapsto V_H(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$



mittels $V_H(X)$ laufen Hamilt. Gln

offenbar

$$\dot{X}(t) = V_H(X(t))$$



d.h.: die Phasenraumkurven $X(t)$ sind
genau die Integralkurven ("Flusslinien")
des Hamiltonschen Vektorfeldes

d.h. das Hamiltl. Vf. erzeugt den
Hamiltonschen Phasenraumfluss =

Abb. $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Phasenraum} \\ \equiv \text{Zustandsraum} \end{array}$

$$(x, t) \mapsto \phi_t(x)$$

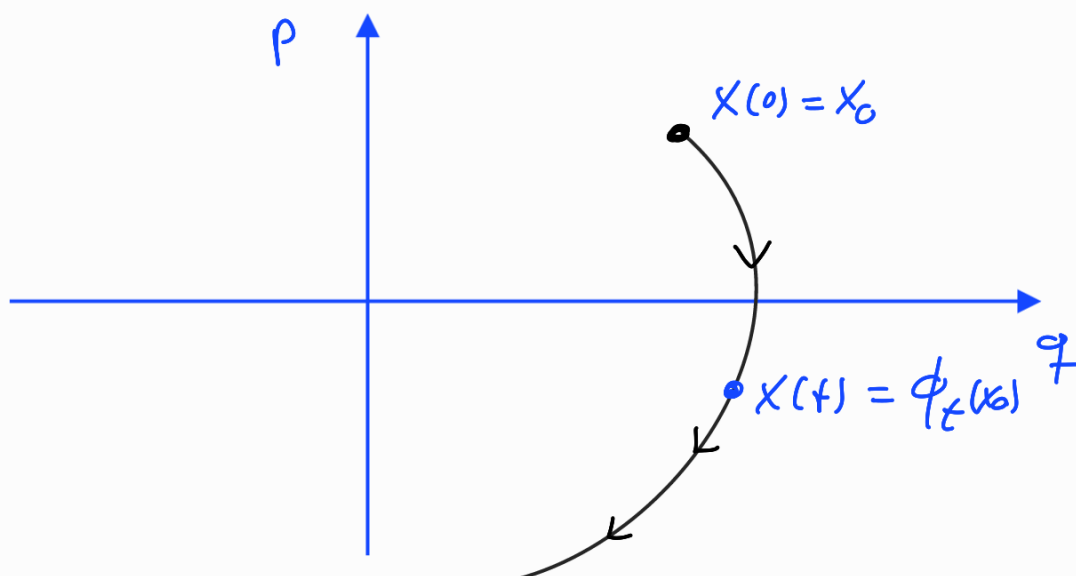
gemäß

$$\dot{\phi}_t(x) \stackrel{!}{=} V_H(\phi_t(x))$$

$$\phi_0(x) = x$$

d.h. $x(t) := \phi_t(x_0)$ ist die Phasen-
 raumbahn (d.h.: $\dot{x}(t) = V_H(x(t))$) zum

Anfangswert $x(0) = x_0$



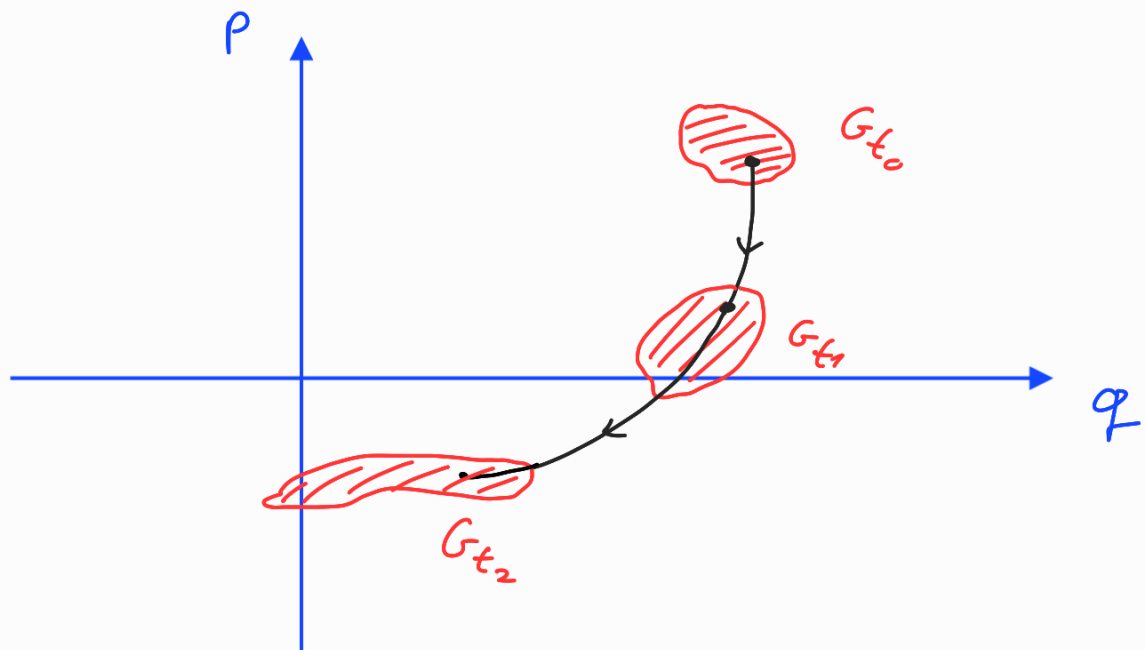
Offensichtliche Eigenschaften:

$$\circ \quad \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1 + t_2}$$

$$\circ \quad \phi_t^{-1} = \phi_{-t}$$

Satz von Liouville

Der Hamiltonsche Fluss ist Volumen-
erhaltend ("inkompressibel").



$$\text{Vol}(G_t) \stackrel{!}{=} \text{Vol}(G_{t'})$$

Volumenerhaltung / Inkompressibilität des

Hamilt. Flusses ist Folge der Divergenz-

freiheit des Hamilt. Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V_H &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_i} + \frac{\partial V_{n+i}}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i \partial p_i}}_{=} \ominus \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i \partial q_i}}_{=} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -S \operatorname{div} V_H = 0$$

↑
kontinuitätsgl.

$\rightarrow$ initiale homogene Dichte $S(x, 0) = S_0$
bleibt für alle Zeiten homogen:
 $S(x, t) = S_0$

$\rightarrow$ Volumenerhaltung !

(math. Beweis des S.v.L. mittels Trans-
formationssatz)