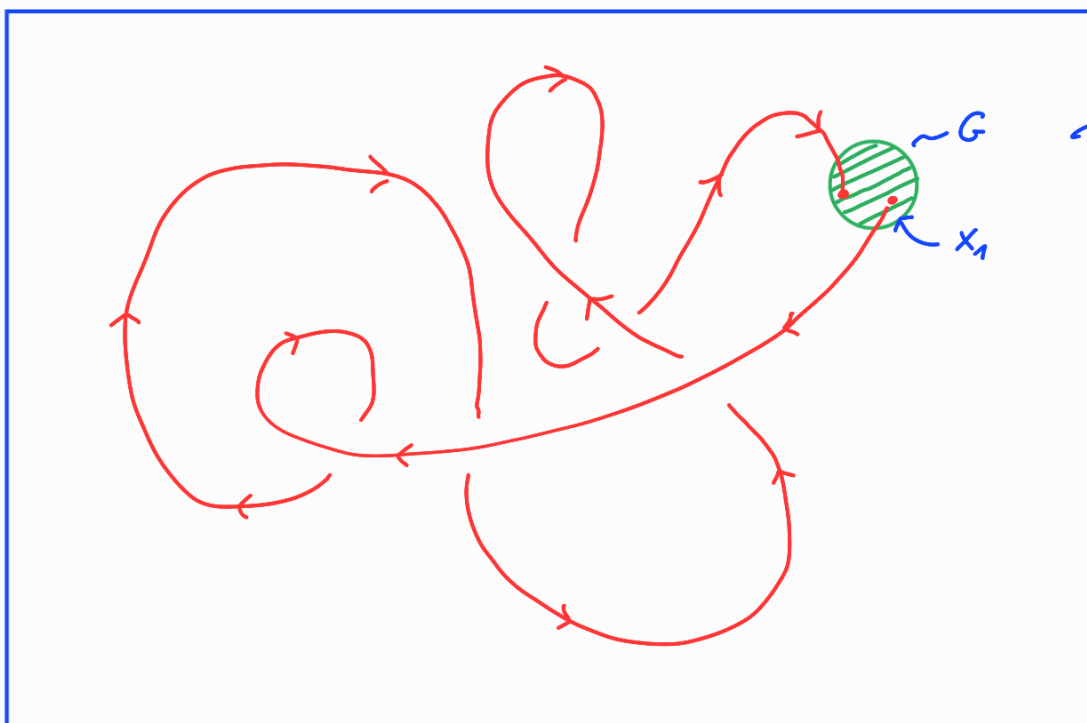


Wiederkehrsatz (Poincaré)

In jedem (beliebig kleinen!) Gebiet $G \subset T$ eines beschränkten^(*) Hamiltonschen Systems gibt es (unendlich viele) Zustände, die nach hinreichend langer Zeit in G zurück gekehrt sind.

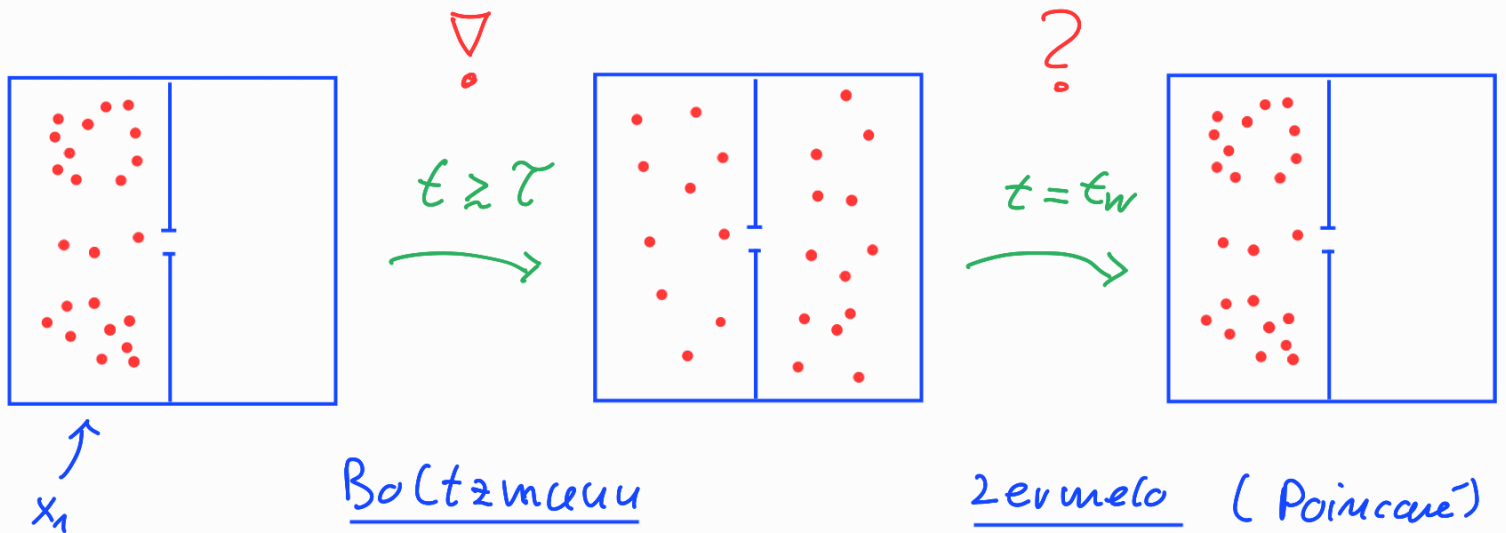
(*) beschränkt: $T_E := \{ x \in T \mid H(x) \leq E \}$ ist für alle E von endlichem Volumen: $\text{Vol}(T_E) < \infty$ (der Fall wenn $U(q) \rightarrow \infty$ für $|q| \rightarrow \infty$)



T_E
 $\exists x_1 \in G,$
 $t_w > 0 :$

$\phi_{t_w}(x_1) \in G !$

→ Kontroverse in mechanischer Begründung
thermodynamischer Irreversibilität
(2. Hauptsatz der T.D.) :



Auflösung : Wie der 1. Hauptsatz wichtig, aber
Wiederkehrzeit $t_w \gg t_{\text{Alter}}$
des Universums ($14 \cdot 10^9$ J.) !

(vgl. Aufgabe 33, Blatt 8)

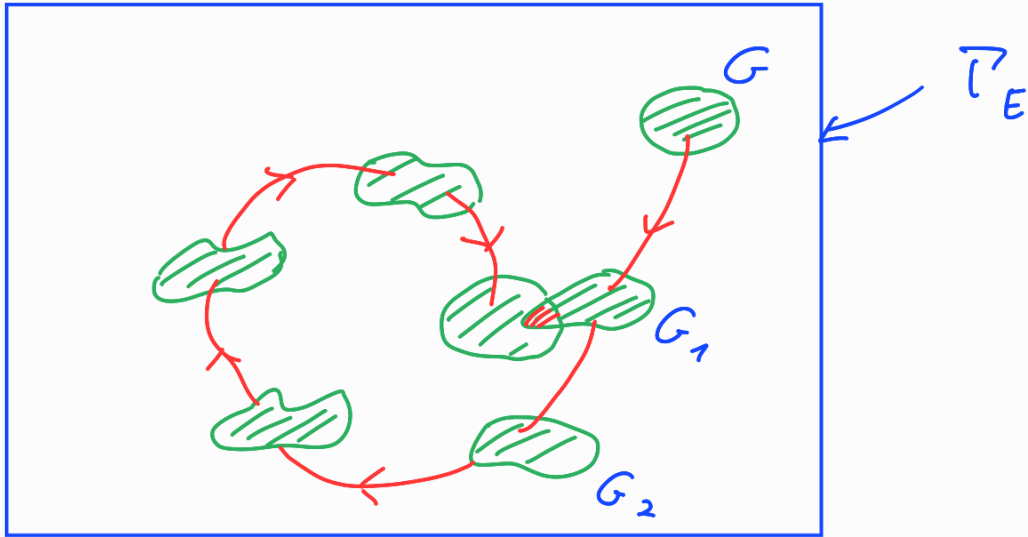
Beweis des Wiederkehrsatzes :

$$\text{setze } E = \max \{ H(x) \mid x \in G \}$$

$$\rightarrow \text{für alle } t \quad \phi_t(G) \subset T_E \quad (1) \quad \rightarrow$$

wähle $T > 0$ beliebig und setze für

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad G_m := \phi_{mT}(G)$$



ausfolgend $G_m \subset T_E$, $\text{Vol}(T_E) < \infty$,

$$\text{Vol}(G_m) = \text{Vol}(G) \quad (\text{S.v. Liouville})$$

gibt es $h \geq \ell \geq 0$ so, dass

$$G_h \cap G_\ell \neq \emptyset$$

$$\leadsto \phi_{-\ell T}(G_h \cap G_\ell) = \underbrace{G_{h-\ell}}_{=: G} \cap G \neq \emptyset$$

$\leadsto$ für $x \in G_h \cap G_\ell$ offenbar $\phi_{mT}(x) \in G$;

d.h. $x \in G$ ist nach Zeit $t_u := uT$ in G zurück gekehrt. $\square$

Physikalische Größen, Zeitableitung, Poisson-Klammer

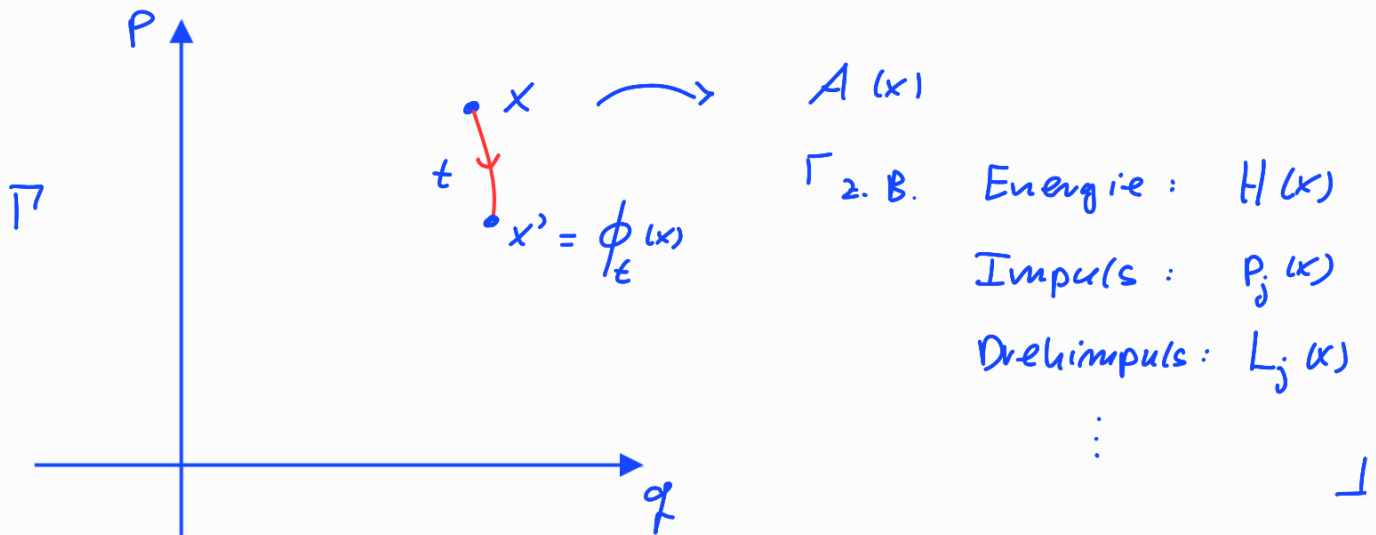
$$\text{Phasenraum } \Gamma = \{ x = (q, p) \} (\cong \mathbb{R}^{2n})$$

→ physikalische Größe $A \triangleq$ Phasenraumfunktion

$$A : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto A(x)$$

↑ Wert der Größe A
wenn System im
Zustand x



Wie ändert sich $A(x)$ mit der Zeit?

$$x \xrightarrow{\phi_t} \underline{x'} \quad \mapsto \quad A(x) \mapsto \underline{A(x')} = A(\phi_t(x)) = A \circ \phi_t(x)$$

"Zeitableitung von A an der Stelle x " :

$$\dot{A}(x) := \left. \frac{d}{dt} A \circ \phi_t(x) \right|_{t=0}$$

↑
physikalische Größe !

Berechnung von $\dot{A}$: Sei $x(t) = \phi_t(x_0)$;

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{A}(x_0) &= \left. \frac{d}{dt} A(x(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\underline{2n}} \frac{\partial A}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{\underline{n}} \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$x(t)$ genügt den Hamiltb. Gln:

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t)) \quad , \quad \dot{p}_i(t) = - \frac{\partial H}{\partial q_i}(x(t)) \quad ;$$

somit

$$\dot{A}(x_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)_{x=x_0}$$

mittels Poisson-Klammer zweier

Phasenraumfunktionen A, B

$$\{A, B\} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right)$$

erhalten wir also:

$$\dot{A} = \{H, A\}$$

┌ Falls eine Größe A explizit zeitabhängig
ist, also $A(x, \underline{t})$, dann

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial A}{\partial x_i} \dot{x}_i + \underline{\frac{\partial A}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

im Folgenden gehen wir immer von
nicht explizit zeitabhängigen Größen aus

└

$$\rightarrow A \text{ Erhaltungsgröße} \Leftrightarrow \{H, A\} = 0$$

(*)

nun ist offenbar für jede Phaseinv. fkt A

$$\{A, A\} = 0, \quad \text{insbesondere} \quad \{H, H\} = 0$$

d. h. mit (*):

$H(q, p)$ ist in jedem System eine Erhaltungsgröße, genannt "Energie".