

Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ und Gesamt-

drehimpuls $\vec{L} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$ eines N -Teilchen

systems sind i. d. R. Erhaltungsgrößen; kann

gezeigt werden mittels

$$\dot{P}_j = \{H, P_j\} = \dots = 0,$$

$$\dot{L}_j = \{H, L_j\} = \dots = 0,$$

Rechnungen ähnlich denen in Newt. Mechanik;

hier: alternativer Zugang mittels

1) 1-Parameter-Transformationen

$\longleftrightarrow$ Phasenraumfunktionen

$\longleftrightarrow$ physikalischen Größen

2) Symmetrie-Transformationen


 $\longleftrightarrow$ Erhaltungsgrößen

- 1) beliebige Phasenraumfunkt. A (= physik. Größe A !) definiert 1-Parameter-Folge des Phasenraums

$$\begin{aligned}\phi^A : \quad T \times \mathbb{R} &\rightarrow T \\ (x, s) &\mapsto \phi_s^A(x)\end{aligned}$$

gemäß

$$(i) \quad \frac{d\phi_s^A(x)}{ds} = V_A(\phi_s^A(x))$$

$$(ii) \quad \phi_0^A(x) = x$$

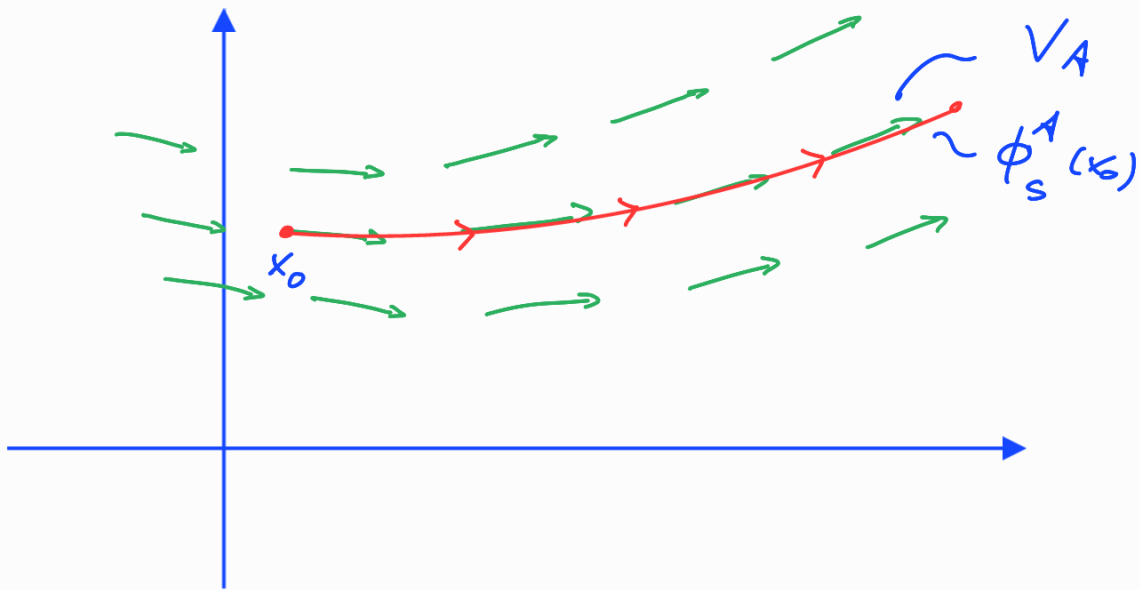
mit

$$V_A(x) := \left(\frac{\partial A}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial p_n}, \ominus \frac{\partial A}{\partial q_1}, \dots, \ominus \frac{\partial A}{\partial q_n} \right)$$

$$\text{d.h. :} \quad \tilde{\phi}_s \equiv \phi_s^A \triangleq \text{Hamiltonscher Fluss}$$

bzgl. "Zeit" s und

"Hamiltonfkt." $\tilde{H} \equiv A$



Beispiele:

N -Teilchen System:

$$q = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \equiv (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots)$$

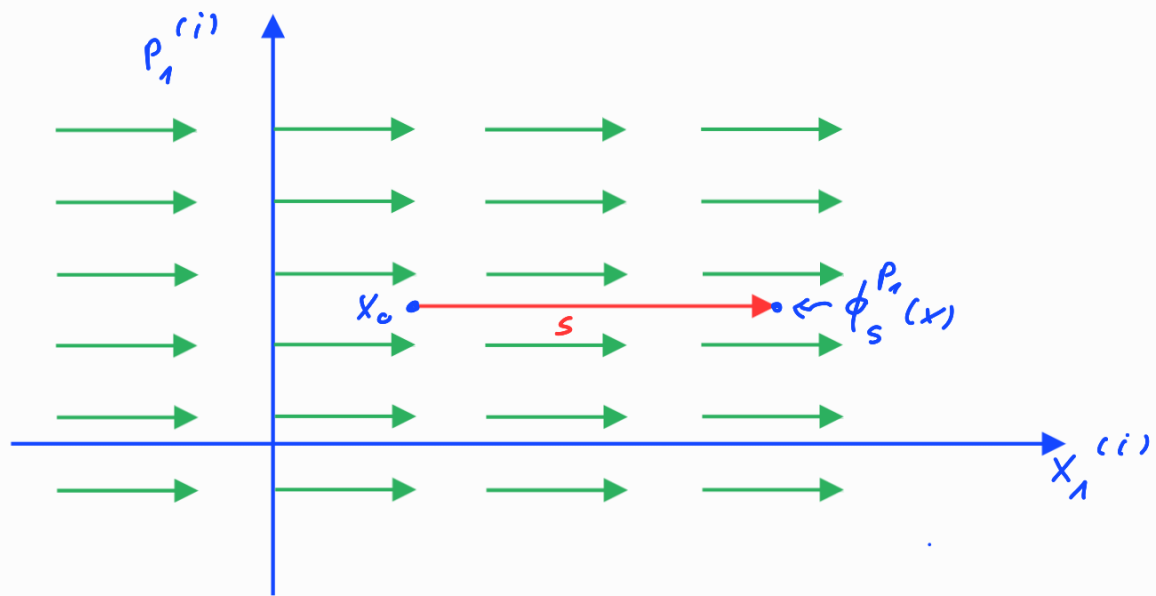
$$p = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \equiv (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots)$$

a) Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$A(x) \equiv P_j(q, p) = \sum_{i=1}^N p_j^{(i)} \quad ; \quad j=1, 2, 3$$

$$\rightarrow V_{p_1}(x) = (\underbrace{1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots}_{V_{1 \dots, n}}; \underbrace{0, \dots, 0}_{V_{n+1, \dots, 2n}})$$

konstantes Vektorfeld



$$(\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2, \dots, \vec{\pi}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$$

$$\xrightarrow[\phi_s^{p_1}]{} (\vec{\pi}_1 + s \vec{e}_1, \vec{\pi}_2 + s \vec{e}_1, \dots, \vec{\pi}_N + s \vec{e}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$$

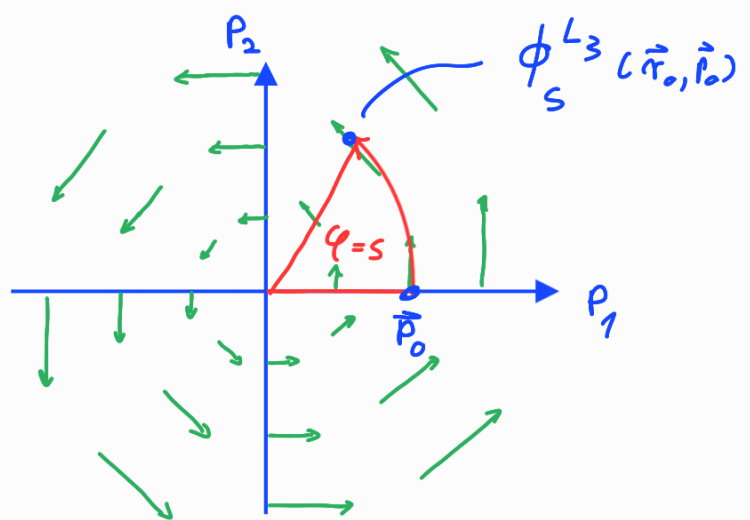
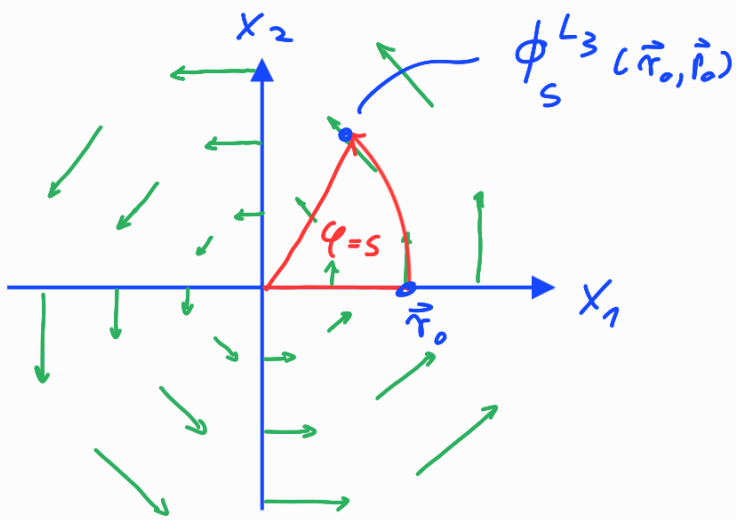
d.h. : $\phi_s^{p_j} \cong$ räumliche Translationen
der Teilchen um Strecke s
in Richtung $\vec{e}_j$

b) Drehimpuls $\vec{L} = \vec{\pi} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (N=1)$

$$A(\vec{\pi}, \vec{p}) \equiv L_3(\vec{\pi}, \vec{p}) = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

$$\rightarrow V_{L_3}(\vec{\pi}, \vec{p}) = (-x_2, x_1, 0, -p_2, p_1, 0)$$

$\rightsquigarrow$



$\phi_S^{L3} \hat{=} \text{Rotation im Orts- und Impulsraum}$
 um Achse $\vec{e}_3$, Winkel s

1) Energie $H(q, p)$

$\rightarrow \phi_t^H \equiv \phi_t : \text{Hamilt. Fluss}$

$\hat{=} \underline{\text{Translation in der Zeit um } t:}$

$x(t_0) \xrightarrow{\phi_t} x(\underline{t_0 + t})$!

Zusammenfassung der Beispiele:

physik. Größe	1-Param.-Trafo
Energie H	Zeit-Translation
Impuls $\vec{p}$	Orts-Translation
Drehimpuls $\vec{L}$	Rotation
(Schwerpunkt: $\vec{R} - \frac{\vec{p}}{m} t$	Galilei-Boost)



hier nicht gezeigt

2) Symmetrie-Transformation (Definition)

Eine 1-Parameter-Trafo ϕ_s^A ist eine Symmetrie-Transformation eines Systems mit Hamiltonfkt. H g. d. w.

$$H(x) = H(\phi_s^A(x))$$



a. h. $H = H \circ \phi_s^A$



d.h. ϕ_s^A ist g.d. eine Symmetrie-Tr.
 von H wenn H bzgl. "Hamiltonflut"
 $\hat{H} \equiv A$ und "Zeit" s eine "Erhaltungs-
 größe" ist; d.h. genau wenn

$$\{A, H\} = 0$$

" $\Leftrightarrow$ " $\{H, A\} = 0$

$\Leftrightarrow$ A ist Erhaltungsgröße des
 Systems mit Hamilt.flut H !

dannit haben wir folgenden Zusammenhang
 zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen

gelist: Satz (Noether 1918)

ϕ^A ist Symmetrie-Transf. genau dann
 wenn A eine Erhaltungsgröße ist.

zurück zu den Beispielen:

a) $\phi_s^{P_j} =$ Translation um s in Richtung $\vec{e}_j$
ist Symmetrie-Trufo von

$$H(q, p) = \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}(\underline{\vec{r}_i - \vec{r}_j})$$

Noether

$\rightarrow P_j$ und damit $\vec{P}$ ist Erhaltungsgröße!

b) $\phi_s^{L_j} =$ Rotation ist Symmetrie-Tr.

$$\text{von } H(q, p) = \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}(\underline{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|})$$

Noether

$\rightarrow L$ ist Erhaltungsgröße!

c) $\phi_t^H =$ Zeittranslation um t ist

Symmetrie von $H(q, p, \cancel{t})$

Noth.

$\rightarrow H$ ist Erhaltungsgröße!