Minkowski Raum-Zeit, Pseudoskalarprodukt

Erinnerung: euklidischer (3d) Raum

$$= \mathbb{R}^3 + \text{Skalarprodukt}: \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

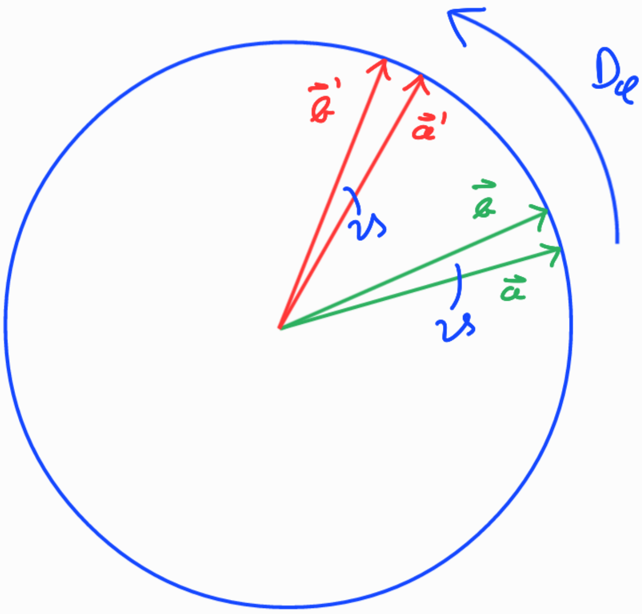
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

→ eukl. Geometrie:

- Länge / Betrag: $|\vec{a}| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$
- Winkel: $\cos\vartheta = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen (und Spiegelungen):

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \overset{!}{=} \langle D_\varphi \vec{a}, D_\varphi \vec{b} \rangle$$



die "richtige" Geometrie der 4d Raum-Zeit ist <u>unabhängig</u> vom Bezugssystem und daher durch ein <u>Lorentztransf.-invariantes</u> Pseudo-Skalarprodukt gegeben:

$$\boxed{\begin{aligned} (u, v) &:= u_0 v_0 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= u_0 v_0 - u_1 v_0 - u_2 v_2 - u_3 v_3 \end{aligned}}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- $(u, v) = (v, u)$ (Symmetrie)
- $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$

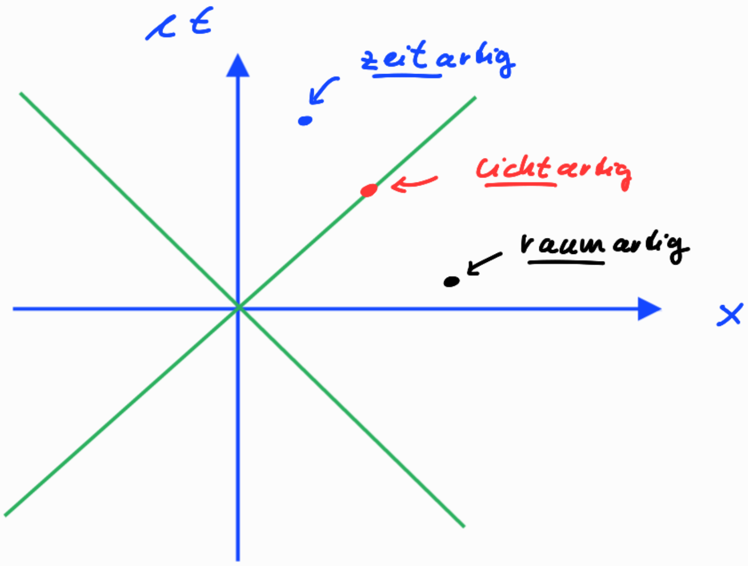
  $(u, \lambda v) = \lambda (u, v)$ (Linearität)

$$u^2 := (u, u) = u_0^2 - |\vec{u}|^2 \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad !$$

für $x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$: $x^2 = 0 \iff |ct| = |\vec{x}|$

$\iff$ x auf Oberfläche des Lichtkegels

$:\iff$ x <u>lichtartig</u>



Def.: Vierervektor u ist

<u>zeitartig</u> $:\iff u^2 > 0$

<u>lichtartig</u> $:\iff u^2 = 0$

<u>raumartig</u> $:\iff u^2 < 0$

- <u>Invarianz unter Lorentztrafo L</u> :

$$(u, v) = (Lu, Lv)$$

insbes. $u^2 = (Lu)^2$

$\ulcorner$ es genügt zu zeigen: $\quad (u,u) = (Lu, Lu)\,, \quad (1)$

(denn dann $\quad (u+v, u+v) \overset{!}{=} (Lu+Lv, Lu+Lv)$

$$\cancel{u^2} + \cancel{v^2} + 2\,(u,v) \qquad\qquad \cancel{(Lu)^2} + \cancel{(Lv)^2} + 2\langle Lu, Lv\rangle$$

$$\rightarrow \quad (u,v) = (Lu, Lv) \quad)$$

mit $\quad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\quad u' = Lu = \begin{pmatrix} \gamma\,(u_0 - v/c\, u_1) \\ \gamma\,(u_1 - v/c\, u_0) \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

bleibt zu zeigen: $\quad u_0^2 - u_1^2 \overset{!}{=} u_0'^2 - u_1'^2 \; :$

$$\text{r. S.} = \gamma^2 (u_0 - v/c\, u_1)^2 - \gamma^2 (u_1 - v/c\, u_0)^2$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(u_0^2 + v^2/c^2\, u_1^2 - u_1^2 - v^2/c^2\, u_0^2 \right)^2$$

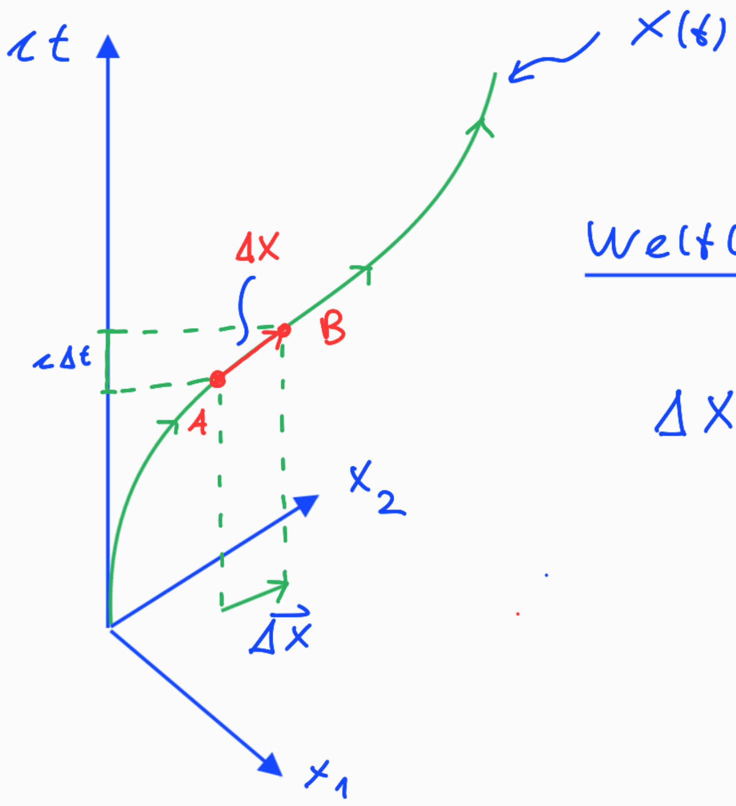
$$= u_0^2 - u_1^2 \overset{!}{=} \text{l. S.} \qquad \lrcorner$$

Eigenzeit und Zwillingsparadoxon

Beobachter bewege sich längs Weltlinie

$$x(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$$

Zeit bzgl. K $\qquad$ Ortskoord. bzgl. K zur Zeit t



<u>Weltlinienelement</u>

$$\Delta X = X_B - X_A = \begin{pmatrix} c\,\Delta t \\ \Delta\vec{x} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ <u>"Länge" Δs des Weltlinienelements:</u>

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2} = \left(c^2 t^2 - |\Delta\vec{x}|^2 \right)^{1/2}$$

<u>Lorentz invariant</u> (und damit unabhängig vom Bezugssystem), da $(\ldots,\ldots)$ Lorentzinv.

<u>physikalische Bedeutung:</u>

<u>momentanes Ruhesystem</u> zur Zeit t, K_t', bewege sich relativ zu K mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ $\rightarrow$

bzgl. K'_t $\qquad \Delta\vec{x}' = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta s = c\,\Delta t'$

d.h. $\frac{\Delta s}{c} = \Delta t'$ ist die im momentanen Ruhesystem vergangene Zeit !

→ Def.: Eigenzeit $\quad \boxed{\Delta\tau := \frac{\Delta s}{c}}$

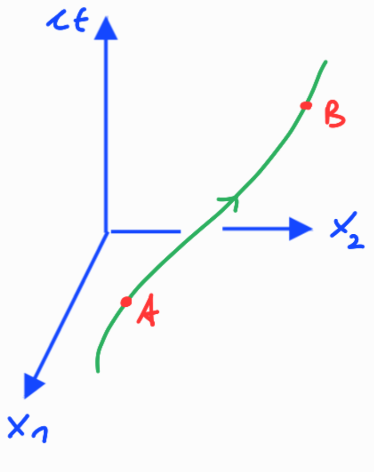
Berechnung im System K:

$$(c\,\Delta\tau)^2 = \Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - |\Delta\vec{x}|^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{|\Delta\vec{x}|^2}{\Delta t^2}\right) c^2\Delta t^2$$

d.h. $\quad \boxed{d\tau = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}(t)|^2}{c^2}}\, dt}$

→ vergangene Eigenzeit längs eines ausgedehnten Stücks Weltlinie per Integration:



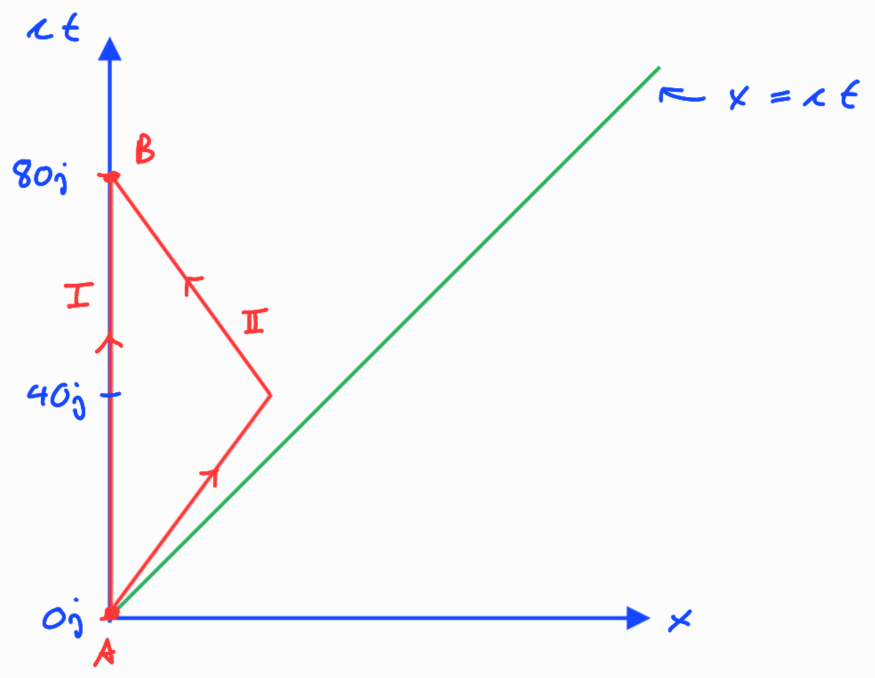
$$\boxed{\tau_A - \tau_B = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}(t)|^2}{c^2}}\, dt}$$

Per Konstruktion ist die Eigenzeit eines bewegten Beobachters genau die Zeit, die eine vom Beobachter mitgeführte (Licht-) Uhr anzeigt; gemäß des Relativitätsprinzips ist damit die Eigenzeit die für <u>alle</u> Prozesse (physikalische, chemische, biologische, physiologische, ...) im momentanen Ruhesystem des Beobachters relevante Zeit!

→ <u>"Zwillingsparadoxon"</u>

Einer von zwei Zwillingen fliegt 40 j$^{(*)}$ mit Geschw. $\vec{v}_1 = 0.95\, c\, \vec{e}_1$, bremst und beschleunigt abrupt, um dann mit $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ in insgesamt 80 j$^{(*)}$ wieder zu seinem Zwillingsbruder zurück zu kehren. ((*): bzgl. des auf der Erde zurückbleibenden Zwillings.) <u>Um wieviele Jahre ist der reisende Zwilling gealtert</u> ?

Weltlinien der Zwillinge:



zwischen A und B vergangene

- Eigenzeit τ_I des Zwillings I: $\tau_I = \Delta t = \underline{\underline{80j}}$
- Eigenzeit τ_{II} des reisenden Zwillings II:

$$\tau_{II} = \int_0^{40j} \underbrace{\sqrt{1-0.95^2}}_{\hat{=}\ 0.31} dt + \int_{40j}^{80j} \underbrace{\sqrt{1-0.95^2}}_{\hat{=}\ 0.31} dt$$

$$= 80j \cdot 0.31 = \underline{\underline{25j}}$$

$\rightarrow$ während der für den Erdzwilling I 80j dauernden Reise des Zwillings II ist dieser nur um 25j gealtert.

Das "Zwillingsparadoxon" erscheint paradox nur wenn die Weltlinien I und II fälschlicherweise als äquivalent angesehen werden.

"euklidisches" Analogon:

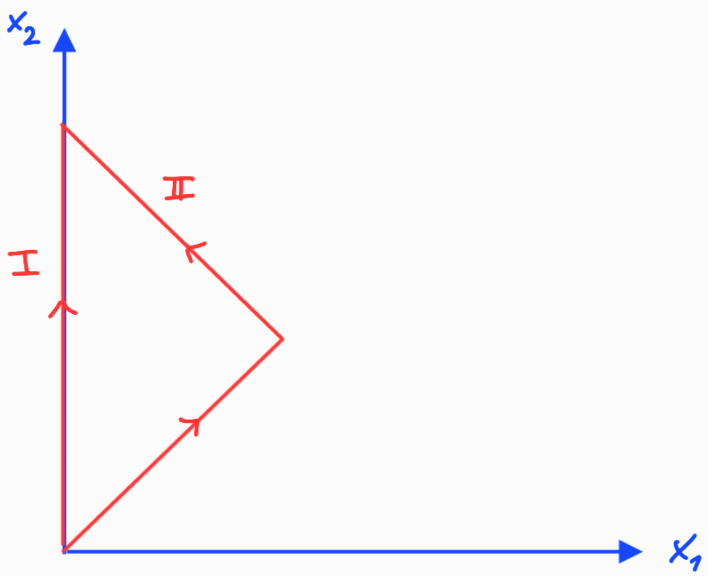
Zwilling I fährt 80 km Richtung Norden;

Zwilling II fährt $40\sqrt{2}$ km Richtung Nord-Ost,

dann $40 \cdot \sqrt{2}$ km Richtung Nord-West;

$\rightarrow$ Zwilling I hat 80 km zurückgelegt,

Zwilling II dagegen $80 \cdot \sqrt{2}$ km = 113 km



tatsächlich sind Drehung D_φ im euklidischen Raum und Lorentztransformation L_v im Minkowski-Raum mathematisch sehr ähnlich:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$L_v = \begin{pmatrix} \gamma & -v/c\,\gamma \\ -v/c\,\gamma & \gamma \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

mit <u>Rapidität</u> $\phi = \operatorname{artanh} v/c$

beachte:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \quad \cosh\phi = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} + e^{-\phi}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right), \quad \sinh\phi = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} - e^{-\phi}\right)$$

$$\hookrightarrow \quad \cosh\phi = \cos(i\phi), \quad i\sinh\phi = \sin(i\phi)$$

d.h. Lorentztrafo $L_v \cong$ Drehung um imaginären Winkel $\varphi = i \operatorname{artanh} v/c$