

Vierergeschwindigkeit

eines Teilchens/Beobachters mit Weltlinie

$$X(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix} :$$

$$u := \frac{dx}{d\tau}$$

da Eigenzeit τ Lorentzinvariant transformiert sich u genau wie X :

$$u \rightarrow u' = L_v u \quad ;$$

mit $d\tau = \sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2} dt$ folgt :

$$u = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} \frac{dx}{dt}$$

d.h.

$$u = \gamma_{\vec{v}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

- $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$: Geschwindigkeit bzgl. K
- $\gamma_{\vec{v}} = \left(1 - |\vec{v}|^2/c^2\right)^{-1/2}$

→ • $v/c \rightarrow 0$: $u = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

• im mom. Ruhesystem: $u' = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

• in allen Systemen: $u^2 = c^2$

Γ da $u^2 = (u')^2 = c^2 - |\vec{0}|^2 = c^2$

↑
u Lorentz invariant

└

Relativistische Mechanik:

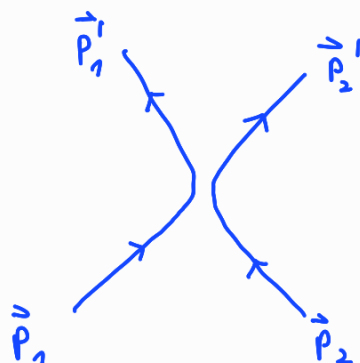
relativistischer Impuls, Energie-Impuls-
Erhaltung

Γ Newtonsche Mechanik:

Impuls: $\vec{p} = m \vec{v}$

→ Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ ist Erhaltungs-

größe:



$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

└

relativistischer Impuls?

Anforderungen:

- (i) Übereinstimmung mit Newt. Impuls
für $v/c \rightarrow 0$
- (ii) Erhaltung im abg. System
- (iii) Lorentztransformation unter
Bezugssystemwechsel

erfüllt durch Vierervektor eines
Teilchen der Ruhemasse m :

$$\boxed{p := m u} = m \frac{d}{d\tau} x$$

↑ Vierergeschwindigkeit



m hier immer Ruhemasse

= invariante Masse $\equiv$ Masse

im Unterschied zur variablen Masse

$$m_v = \gamma_v m = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

die in der rel. Mech. kaum benutzt wird; ein Grund:

relativistische Mechanik

~~≠~~ Newt. Mechanik mit m_v !

Viervektorimpuls im kov. bzgl. Bzgl. K :

$$p = m u = m \gamma_v \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow u = \frac{dx}{dt} = \gamma_v \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

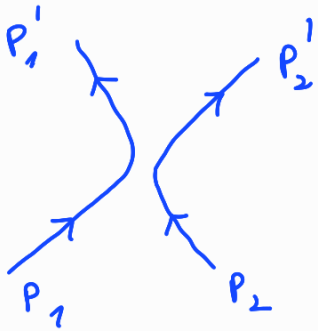
$$\text{d.h.} \quad p_0 = m \gamma_v c$$

$$\vec{p} = m \gamma_v \vec{v} \quad : \quad \underline{\text{relativistischer}}$$

(Drei-) Impuls

Stoßexperimente mit Teilchen hoher Geschw.

$v \rightarrow c$ zeigen Erhaltung des Viererimpulses:



$$p_1 + p_2 \stackrel{!}{=} p_1' + p_2'$$

→ Erhaltung des rel. Dreier-Impulses:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \stackrel{!}{=} \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

aber auch der 0-Komponente:

$$p_{1,0} + p_{2,0} \stackrel{!}{=} p_{1,0}' + p_{2,0}'$$

physikalische Bedeutung der Nullkomp.

p_0 des Viererimpulses p ?

dazu folgende Rechnung: wegen $u^2 = c^2$

$$p^2 = (m u)^2 = m^2 c^2 \quad (\text{in jedem Bezugssyst.})$$

$$\rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} p^2 = \frac{d}{dt} (p_0^2 - |\vec{p}|^2) = 2 p_0 \dot{p}_0 - 2 \langle \vec{p}, \dot{\vec{p}} \rangle$$

$m \gamma_v c$ $m \gamma_v \vec{v}$

→

d.h. $\frac{d}{dt} \langle \epsilon_{p_0} \rangle = \langle \vec{v}, \dot{\vec{p}} \rangle ;$

dies gilt insbes. auch im Grenzfall
 $v/c \rightarrow 0$, in dem Newt. Mech. gültig

und somit $\langle \vec{v}, \dot{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{m} \langle \vec{p}, \dot{\vec{p}} \rangle$
 $= \frac{d}{dt} \underbrace{|\vec{p}|^2 / 2m}$

kinet. Energie!

Einstein



ϵ_{p_0} ist die Energie des
 freien Teilchens!

beachte: p_0 als 0-komp. des Viererimpulses p
 ist absolut festgelegt!

($\tilde{p} := \begin{pmatrix} p_0 + a \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ hätte kein Lorentz-
 transf.verhalten)

Die (relativistische) Energie eines freien Teilchens der Ruhemasse m und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist

$$E = \gamma P_0 = m \gamma_v c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\uparrow$
 $P_0 = m \gamma_v c$

Erläuterungen:

1) Für $\vec{v}=0$ ist E die Ruheenergie des

Teilchens: $E_0 = m c^2$

erscheint in der Energie-Impuls-Erhaltung

(z.B. $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$) und ist damit

physikalisch relevant

→ Ruheenergie und Ruhemasse
sind äquivalent!

→ Massenangaben in der Teilchenphysik
i. d. R. durch Energie:

z.B. $m_{\text{Proton}} = 1 \text{ GeV}$

d.h. $m_{\text{Proton}} = 1 \text{ GeV} / c^2$

$$= 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ GeV} / c^2$$

$$\approx 1,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad \rfloor$$

2) im "nicht-relativistischen Grenzfall" $v/c \ll 1$

gilt:

$$E = m c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m c^2 (1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 + \dots)$$

$$\uparrow$$

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x + O(x^2)$$

$\uparrow$
Taylor, $x \ll 1$

$$= m c^2 + \frac{m}{2} v^2 + \dots$$

d.h.

$$\bar{E} = E_0 + \frac{m}{2} |\vec{v}|^2$$

(für $|\vec{v}/c| \ll 1$)

3) mit $E = c p_0$ also

$$p = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} : \quad \frac{\text{Energie-Impuls-}}{\text{(Vier-) Vektor}}$$



4) aus $p^2 = m^2 c^2$ und $p = \left(\frac{E/c}{\vec{p}} \right)$ folgt

relat. Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = (m c^2)^2 + (c |\vec{p}|)^2$$

↳ denn $m^2 c^2 \stackrel{!}{=} p^2 \stackrel{!}{=} E^2/c^2 - |\vec{p}|^2$ ✓

5) Viererimpuls erhaltung

$\hat{=}$ Energie- und Impulserhaltung

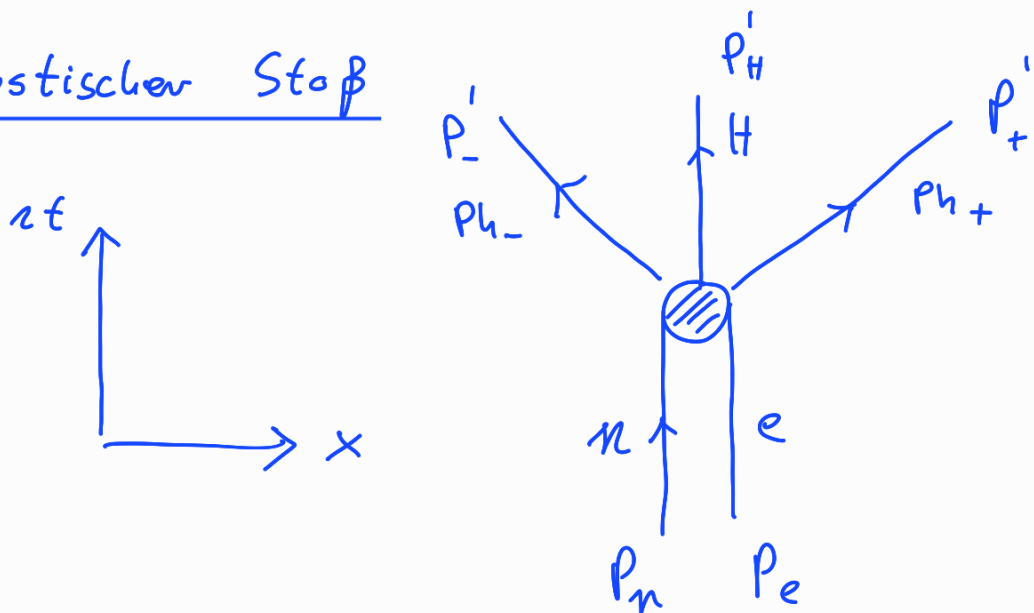
Beispiel

Rekombination von Proton p und Elektron e

zu Wasserstoffatom H + Energie ΔE

in Form zweier
Photonen der Ener. $\frac{\Delta E}{2}$

$\hat{=}$ inelastischer Stoß



mit Impulsen

$$p_n = (m_n c, \vec{0})$$

$$p_e = (m_e c, \vec{0})$$

$$p_H' = (m_H c, \vec{0})$$

$$p_+^{\prime} = \left(\frac{\Delta E}{2} / c, +\vec{n}_{ph} \right)$$

$$p_-^{\prime} = \left(\frac{\Delta E}{2} / c, -\vec{n}_{ph} \right)$$

Energie - Impuls - Erhaltung :

$$p_n + p_e \stackrel{!}{=} p_H' + p_+^{\prime} + p_-^{\prime}$$

$$\text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} (m_n + m_e) c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} m_H c + \Delta E / c \\ +\vec{n}_{ph} \quad -\vec{n}_{ph} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow m_H c^2 = (m_n + m_e) c^2 - \Delta E$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{\text{Massendefekt}} \quad \Delta m = m_n + m_e - m_H \\ = \Delta E / c^2 \quad !$$

$$\underline{\text{hier:}} \quad \frac{\Delta m}{m_H} \approx \frac{13,6 \text{ eV}}{10^9 \text{ eV}} \approx 10^{-8}$$

$$\underline{\text{Kernprozesse:}} \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-2} \quad !$$