

Maxwellsche Elektrodynamik

2 → einheitliche Beschreibung aller elektromagnet.

Phänomene (J. C. Maxwell, ~ 1865)

Grundannahmen

(i) es gibt elektrische Ladungen positiver und negativer Polarität

(ii) Kräfte zwischen elektr. Ladungen werden vermittelt durch

- elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$

- Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

gemäß Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

↑
Kraft auf Teilchen

eigentliche Lorentzkraft

mit Ladung q und Geschwindigkeit $\vec{v}$

(iii) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ genügen den

Maxwellschen Gleichungen

- $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ (Gauß)
- $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (Gauß)
- $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday)
- $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampère - Maxwell)

mit

- $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} : \text{Vakuumdielektrizitätszahl}$
- $\mu_0 = 126 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am} : \text{Vakuumpermeabilität}$
- $\rho(\vec{r}, t) : \text{Ladungsdichte}$
- $\vec{j}(\vec{r}, t) : \text{Stromdichte}$

Elektrostatik

Grundproblem:

statische Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = ?$

$\vec{E}(\vec{r})$ bestimmt durch

Gaußsches Gesetz:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Faradaysches Gesetz:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

(da $\vec{B}$
konstant)

$\vec{E}$ konservativ!

$\hookrightarrow$ es ex. elektrostatisches Potenzial ϕ :

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi$$

in Situationen hoher Symmetrie sehr hilfreich:

integrale Form des Gaußschen Gesetzes:

für beliebiges Volumengebiet V folgt

mit Satz von Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V \quad (*)$$

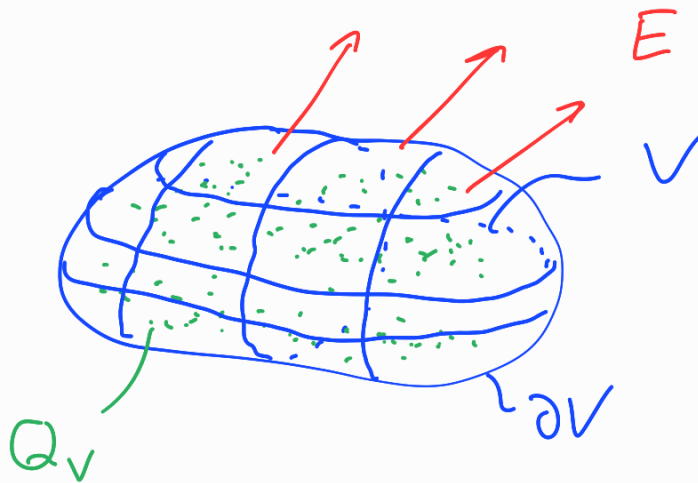


elektrischer Fluß durch
Oberfläche ∂V des
Volumens



im Volumen V

enthaltene Ladung Q_V

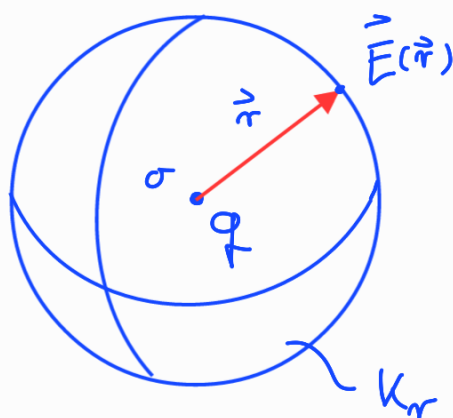


• S. v. Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{A} d\vec{f} = \int_V \underline{\underline{\text{div} \vec{A}}} d^3\vec{r}$$

• $\frac{1}{\epsilon_0} Q_V = \int_V \rho / \epsilon_0 d^3\vec{r} = \int_V \text{div} \vec{E} d^3\vec{r} \stackrel{\text{S. v. G.}}{=} \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f}$

- Punktladung q im Ursprung:



Kugelsymmetrie respektierend

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$

Bestimmung der Feldstärke $E(r)$ mit (*) angewandt auf Kugel von Radius r :

$$4\pi r^2 E(r) \stackrel{\text{Ansatz}}{=} \int_{\partial K_r} \vec{E} d\vec{f} = q / \epsilon_0$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

d. h.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r}$$

┌ denn $\text{grad } \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)' \hat{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r}$ ┘

→
Translation
 $\sigma \rightarrow \vec{r}_0$

Punktladg. q im $\vec{r}_0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} (\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

→
Superposition

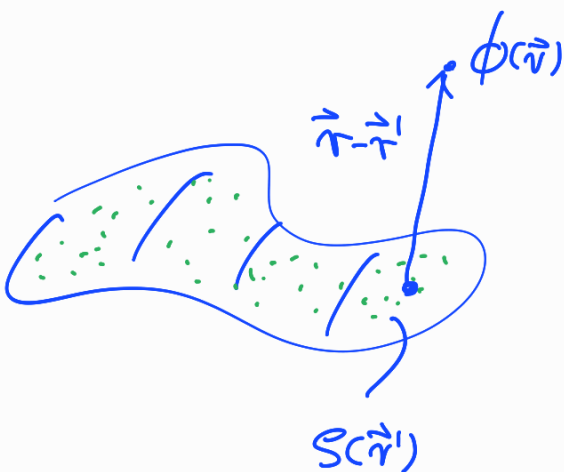
N Punktladgen q_i an Orten $\vec{r}_i$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

→ $\vec{E}(\vec{r})$
- grad

→
kontinuums beschv.

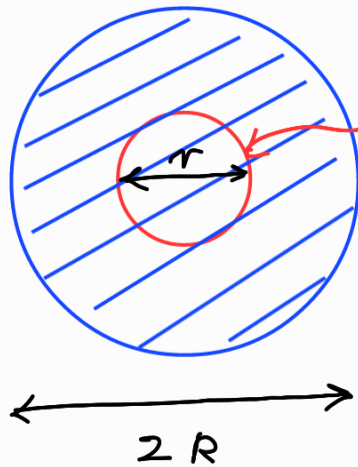
allg. Ladenschichte $\rho(\vec{r})$:



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

- homogen geladene Kugel, Radius R , Ladung Q

Auswahl: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$



Kugel K_r enthält Ladung

$$Q_N = \begin{cases} Q & : r > R \\ Q \cdot \frac{r^3}{R^3} & : r < R \end{cases}$$

$$\rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \int_{\partial K_r} \vec{E} \cdot d\vec{a} \stackrel{!}{=} Q_N / \epsilon_0$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{\hat{r}}{r^2} & : r > R \\ \frac{\hat{r}}{R^3} & : r \leq R \end{cases}$$

$$\rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r} & : r > R \\ \frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} & : r \leq R \end{cases}$$

