

Vektorpotenzial, Biot-Savartsches Gesetz

wegen $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ex. Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ des
Magnetfelds $\vec{B}(\vec{r})$; d.h.

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Vektorpot. nicht eindeutig bestimmt, denn
mit $\vec{A}$ auch

$$\vec{A}' := \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

↑ bel. Skalarfeld

Vektorpotenzial zu $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot} \vec{A}' = \underbrace{\operatorname{rot} \vec{A}}_{\vec{B}} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi}_{\vec{0}} = \vec{B}.$$

diese sog. „Eichfreiheit“ in der Wahl von $\vec{A}$ kann
genutzt werden, damit beispielsweise

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad : \quad \text{„Coulomb-Eichung“}$$

Bestimmungsgleichung für $\vec{A}$ in der Magnetostatik:

$$\begin{aligned}\text{Ampère: } \mu_0 \vec{j} &= \text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \\ &= \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}\end{aligned}$$

d.h. in Coulomb-Eichung ($\text{div } \vec{A} = 0$) genügt $\vec{A}$ Poisson-GL.

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\uparrow \text{ Laplace-Op.: } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Erinnerung: elektrost. Potenzial } \Phi \text{ genügt} \\ \Delta \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

(erfüllt Coulomb-Eichbedingung $\text{div } \vec{A} = 0$!)

rot $\vec{r}$
→

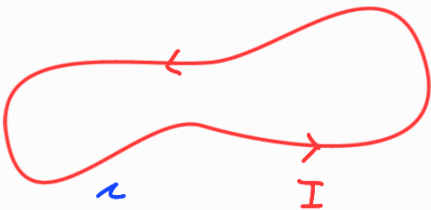
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

(Biot-Savart)

$$\text{rot } \frac{\vec{a}}{r} = (\text{grad } r) \times \vec{a} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} \times \vec{a} = \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}$$

Magnetfeld einer Stromführenden Schleife

$$\begin{aligned} \gamma: [s_0, s_1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \vec{r}(s) \end{aligned}$$



↑ (singuläre) Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}') = I \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{\partial \vec{r}(s)}{\partial s} \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}(s))$$

Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{\partial \vec{r}(s)}{\partial s} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}(s))}{|\vec{r} - \vec{r}(s)|^3}$$

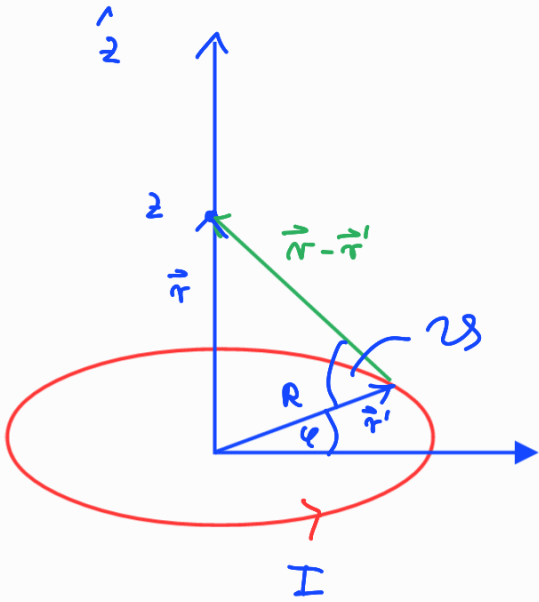
also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

↑

Biot-Savart für Stromschleife

Beispiel: Strom I führender Kreisring, Radius R



$$\vec{r}' = \vec{r}(\varphi) = R \vec{e}_r(\varphi)$$

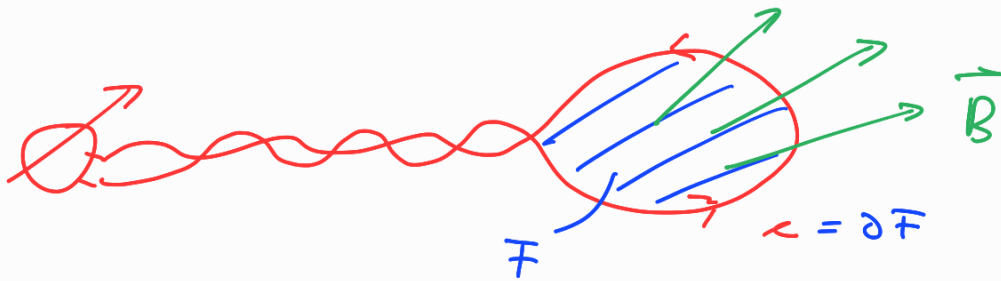
$$\rightarrow \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \varphi} = R \vec{e}_\varphi(\varphi)$$

$$\rightarrow B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad R \underbrace{\left| \frac{\vec{e}_\varphi \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right|}_{\substack{|\vec{r} - \vec{r}'| \\ \parallel}} \underbrace{\cos \alpha}_{\substack{\frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \parallel}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Faradaysches Induktionsgesetz: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

- a) Induktionsspannung in fest stehender Leiterschleife durch zeitlich veränderliches Mag.feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$:



$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= \int_{\kappa} \vec{E} d\vec{\ell} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\vec{F}} \text{rot } \vec{E} d\vec{f} = - \int_{\vec{F}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_{\vec{F}} \vec{B} d\vec{f} \end{aligned}$$

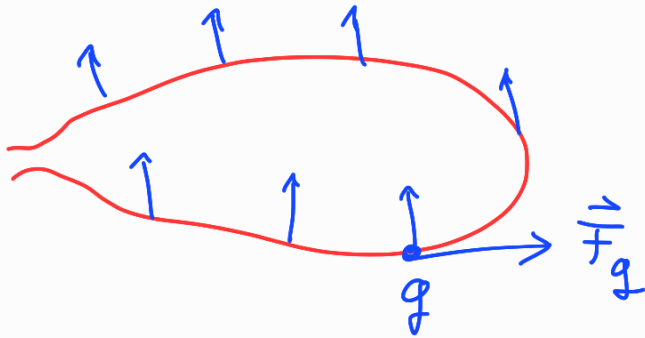
mit Magnet. Fluss $\Phi(t) := \int_{\vec{F}} \vec{B} d\vec{f}$ also

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} \Phi$$

- b) Induktionsspannung in beweglicher Leiterschleife $\kappa(t)$ in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$:

$$U_{\text{ind}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{q} \int_C \vec{F}_q \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{q} \int_C q(\underbrace{\vec{E}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\neq \vec{0}!}) \cdot d\vec{\ell}$$

Lorentzkraft auf
Ladungen in bewegter
Leiterschleife



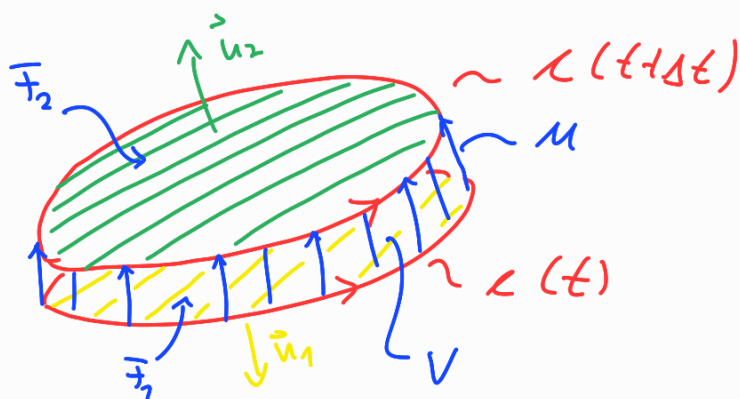
d.h. $U_{\text{ind}} = \int_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (*)$

wir zeigen: auch hier gilt $U_{\text{ind}} \stackrel{!}{=} -\frac{d}{dt} \bar{\Phi}(t)$

Zeitabhängigkeit des mag. Flusses hier auf-

grund $\underbrace{C(t)}_{\equiv} : \quad \bar{\Phi} = \int_{\underbrace{F(t)}_{\equiv}} \vec{B} \cdot d\vec{f}$





$\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ und M bilden Rand ∂V des eingeschlossenen Volumens V ;

$$\text{Gauß: } 0 \stackrel{!}{=} \int_{\partial V} \vec{B} d\vec{f} = \underbrace{\int_{\bar{F}_2} \vec{B} d\vec{f}}_{\parallel \Phi(t+\delta t)} + \underbrace{\int_{\bar{F}_1} \vec{B} d\vec{f}}_{\parallel -\Phi(t)} + \int_M \vec{B} d\vec{f}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\Phi(t+\delta t) - \Phi(t)) = - \frac{1}{\Delta t} \int_M \vec{B} d\vec{f}$$

$$\vec{\Delta f} = \vec{\Delta l} \times \vec{v} \Delta t \quad \uparrow \quad - \frac{1}{\cancel{\Delta t}} \int_{L(t)} \underbrace{\langle \vec{B}, \vec{dl} \times \vec{v} \cancel{\Delta t} \rangle}_{\geq \langle \vec{v} \times \vec{B}, \vec{dl} \rangle}$$

$$\text{d.h. } \frac{d\Phi(t)}{dt} = - \int_{L(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (*) = - U_{\text{ind}}$$

□

