

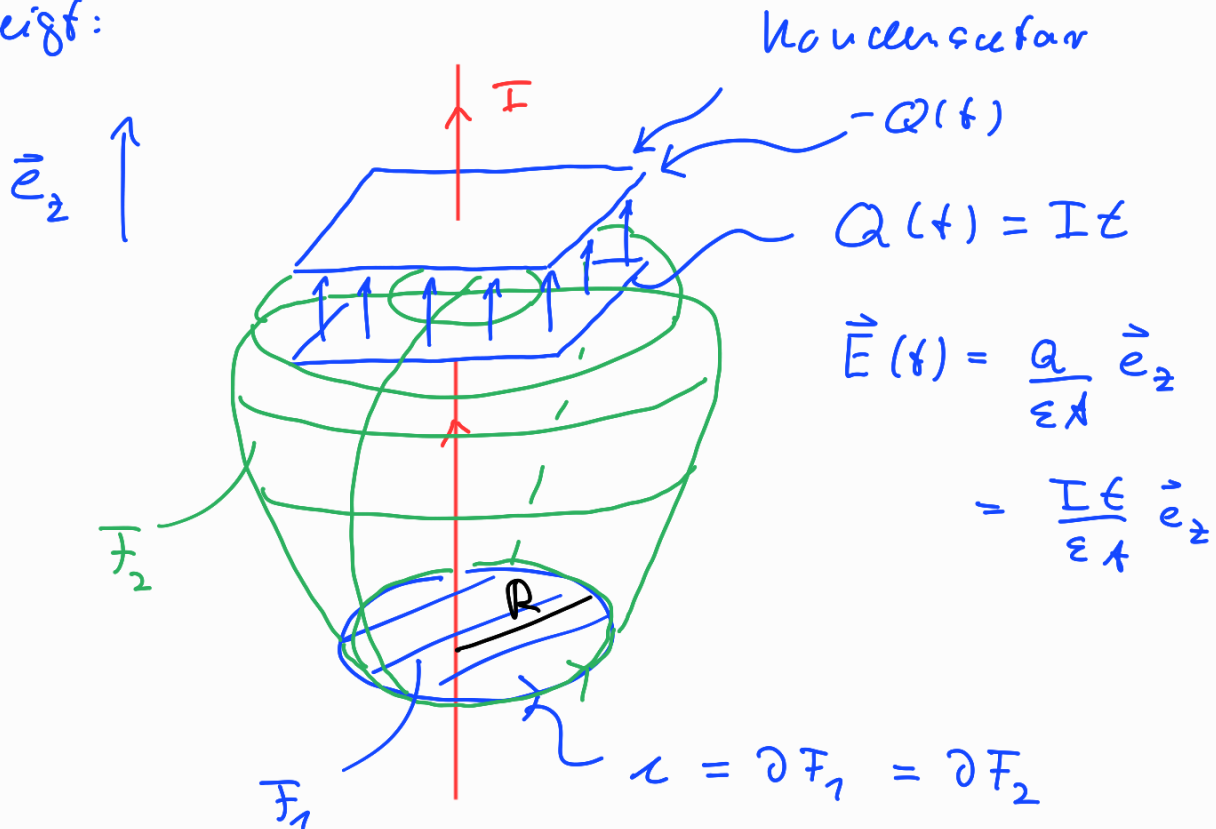
Maxwellsche Verschiebungstrom

Ampèresche Gesetz

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

ist unvollständig wie z.B. folgende Betrachtung

zeigt:



$$\begin{aligned} 2\pi R B_\phi(R) &= \int_C \vec{B} d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{F_1} \text{rot } \vec{B} d\vec{f} \stackrel{\text{Ampère}}{=} \int_{F_1} \mu_0 \vec{j} d\vec{f} = \mu_0 I \\ &= \int_{F_2} \text{rot } \vec{B} d\vec{f} \stackrel{\text{Ampère}}{=} \int_{F_2} \mu_0 \vec{j} d\vec{f} = 0? \end{aligned}$$

⚡

↑ = 0 auf F_2 !

Maxwell:

$$\text{rot } \vec{B} \stackrel{!}{=} \mu_0 \vec{j} + \boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

„Verschiebungstrom“

mit Verschiebungsstrom erhalten wir:

$$2\pi R B_{\phi}(R) \stackrel{\text{Stok.}}{=} \int_{\vec{\mathcal{F}}_2} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int (\underbrace{\mu_0 \vec{j}}_{\substack{\text{Ampère} \\ \text{+ Maxwell}}} + \underbrace{\mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\substack{\text{Verschiebungsstrom}}} \cdot d\vec{f}$$

$$= \mu_0 I \quad \checkmark$$

$\mu_0 \frac{I}{4} \vec{e}_z$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \stackrel{!}{=} 0 \quad (*)$$

zudem:

• Ampère Ges. inkonsistent mit Kontinuitätsgl.:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_{\substack{=0 \\ \text{Stok.}}} = \mu_0 \text{div } \vec{j}$$

$$\rightarrow \text{div } \vec{j} = 0 \quad \nleftrightarrow (*)$$

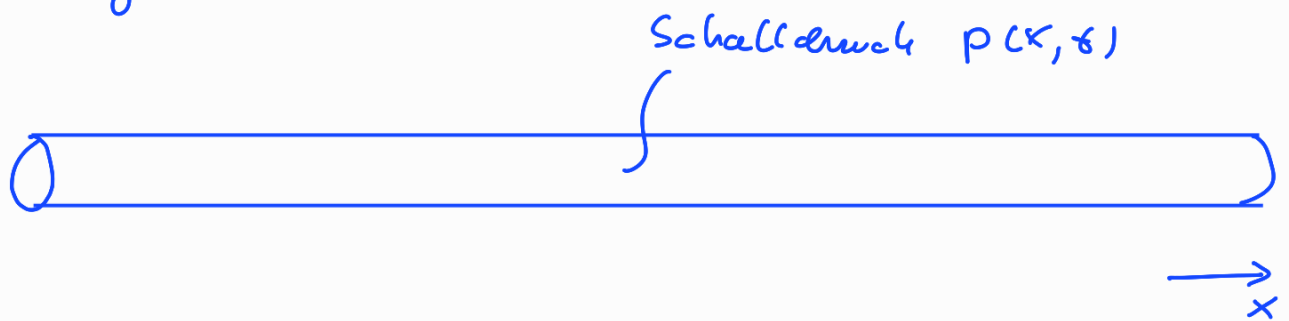
• Ampère-Maxwell Gesetz konsistent mit Konti.-gl.:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad 0 = \mu_0 \text{div } \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{\substack{= \rho / \epsilon_0}}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \quad !$$

Wellengleichung

zuerst in 1D, z.B. zur Beschreibung von Schallausbreitung in Röhre:



$p(x, t)$ genügt 1D-Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

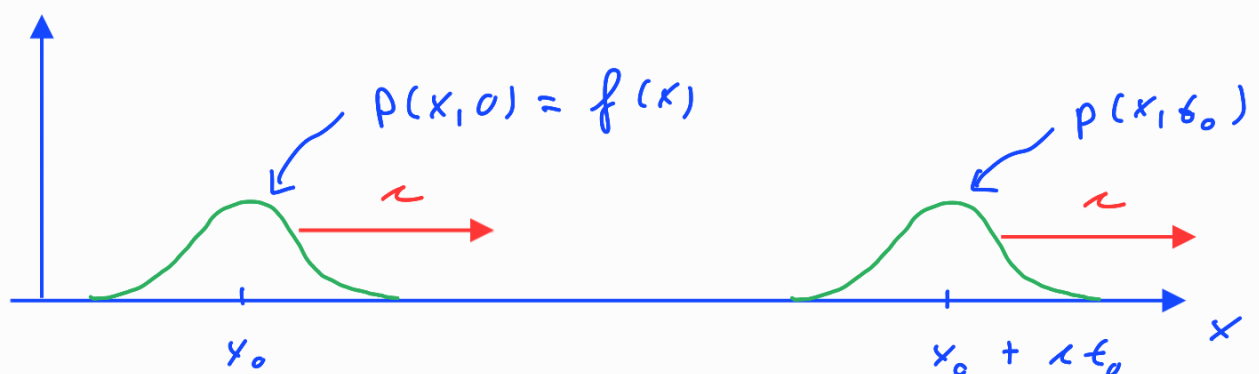
c : konstante der Dim. Geschwindigkeit
= Schallgeschwindigkeit

→ Lösungen:

(i)

$$p(x, t) = f(x \ominus ct)$$

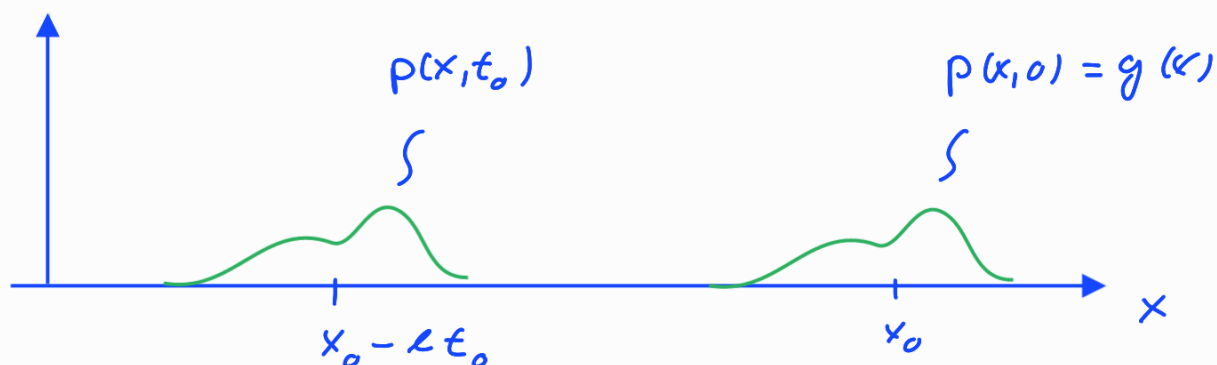
↑ bel. Funktion (2mal diffbar)



(ii)

$$p(x,t) = g(x \oplus ct)$$

↑ 2 mal diffbar



(iii) Wellengleichung linear

→ Superpositionsprinzip

$$\rightarrow p(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

ebenfalls Lösung!

(iv) „monochromatische Welle“ : $f(x) = \cos(kx)$

$$\rightarrow p(x,t) = \cos(kx - \omega t) \quad \text{mit } \omega = kc$$

$$= \operatorname{Re} e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

k : Wellenzahl ;

3D - Wellengleichung für Größe $p(\vec{r}, t)$:

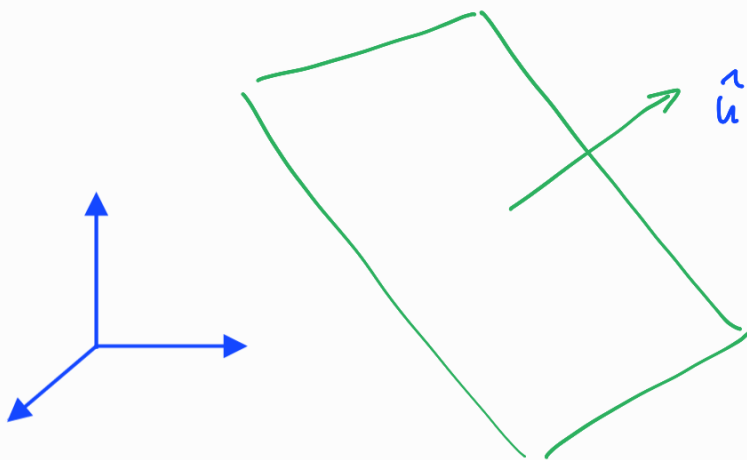
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Lösungen:

- ebene Welle in Richtung $\hat{n}$

$$p_{\hat{n}}(\vec{r}, t) = f(\langle \hat{n}, \vec{r} \rangle - ct)$$



$$\uparrow p_{\hat{n}}(\vec{r}, t_0) = \text{konst}$$

bewegt sich mit Geschw. c in

Richtung $\hat{n}$

◦ ebene monochromatische Welle:

$$f(x) = \cos kx = \operatorname{Re} e^{ikx}$$

$$\rightarrow \rho_{\hat{n}}(\vec{r}, t) = R e^{i \hbar \langle \hat{n}, \vec{r} \rangle - i \hbar \omega t}$$

mit Wellenvektor $\vec{\hbar} = \hbar \hat{n}$

$$\text{Frequenz} \quad \omega = |\vec{\hbar}| c$$

also

$$\rho_{\vec{\hbar}}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} e^{i \langle \vec{\hbar}, \vec{r} \rangle - i \omega t}$$