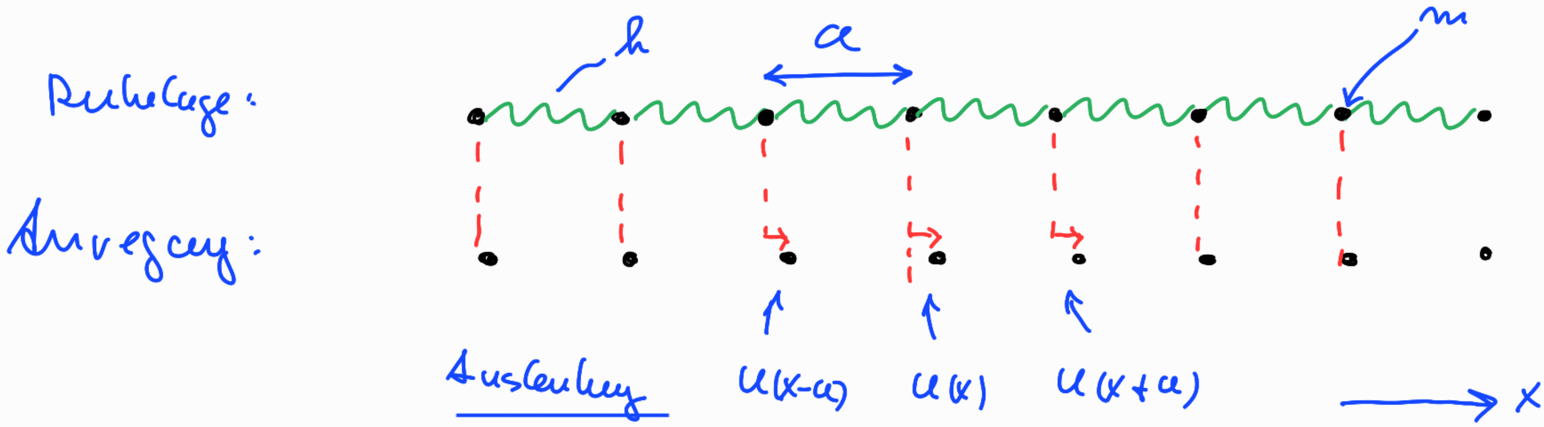
Zur Veranschaulichung der Wellengleichung ein Beispiel aus der Mechanik: "lineare Kette"



Newton:

$$m\,\ddot{u}(x) = a\,k\,\Bigg(\underbrace{\frac{u(x+a)-u(x)}{a}}_{\shortparallel}\Bigg) - a\,k\,\Bigg(\underbrace{\frac{u(x)-u(x-a)}{a}}_{\shortparallel}\Bigg)$$

$$= a^2\,k\left(\frac{u'(x) - u'(x-a)}{a}\right)$$

$$= a^2\,k\;u''(x)$$

d.h. $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit $c = a\sqrt{k/m}$

1D Wellengleichung für die Auslenkung $u(x,t)$

Elektromagnetische Wellen im Vakuum

$\rho = 0, \; \vec{j} = \vec{0}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = 0, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t \end{array}}$$

$\partial/\partial t$

Faraday

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0} + \Delta \vec{E}$$

d.h.
$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}} \; ;$$

analog:
$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta \vec{B}}$$

d.h. $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ genügen 3D-Wellengleichung mit Wellengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}99 \cdot 10^8 \, m/s \overset{!}{=} \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

ε_0: $8{,}85 \cdot 10^{-12} \, Vs/Am$

μ_0: $1{,}26 \cdot 10^{-6} \, As/Vm$

Spezielle Lösungen:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{p} \, f(\langle \hat{n}, \vec{r} \rangle - ct)}$$

Polarisation

- $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}\left(\hat{p} \, f(\langle \hat{n}, \vec{r} \rangle - ct) \right)$

$$= \langle \hat{p} \, , \, \operatorname{grad} f(\cdots) \rangle$$

$$= \langle \hat{p} \, , \, \hat{u} \rangle \, f'(\dots) \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow \quad \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle = 0 \; ; \quad$ d.h. $\boxed{\hat{p} \perp \hat{u}}$

Polarisation $\perp$ Ausbreitungsrichtung

- $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot}\left(\hat{p} \, f(\langle \hat{u}, \vec{r} \rangle - ct) \right)$

$$= \operatorname{grad} f(\dots) \times \hat{p}$$

$$= \hat{u} \times \hat{p} \; f'(\langle \hat{u}, \vec{r} \rangle - ct)$$

$$\overset{!}{=} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \, \hat{u} \times \hat{p} \; f(\langle \hat{u}, \vec{r} \rangle - ct)}$

d.h. $\quad \vec{B} = \frac{\hat{u}}{c} \times \vec{E} \quad \rightarrow \quad |\vec{B}| = |\vec{E}| / c$

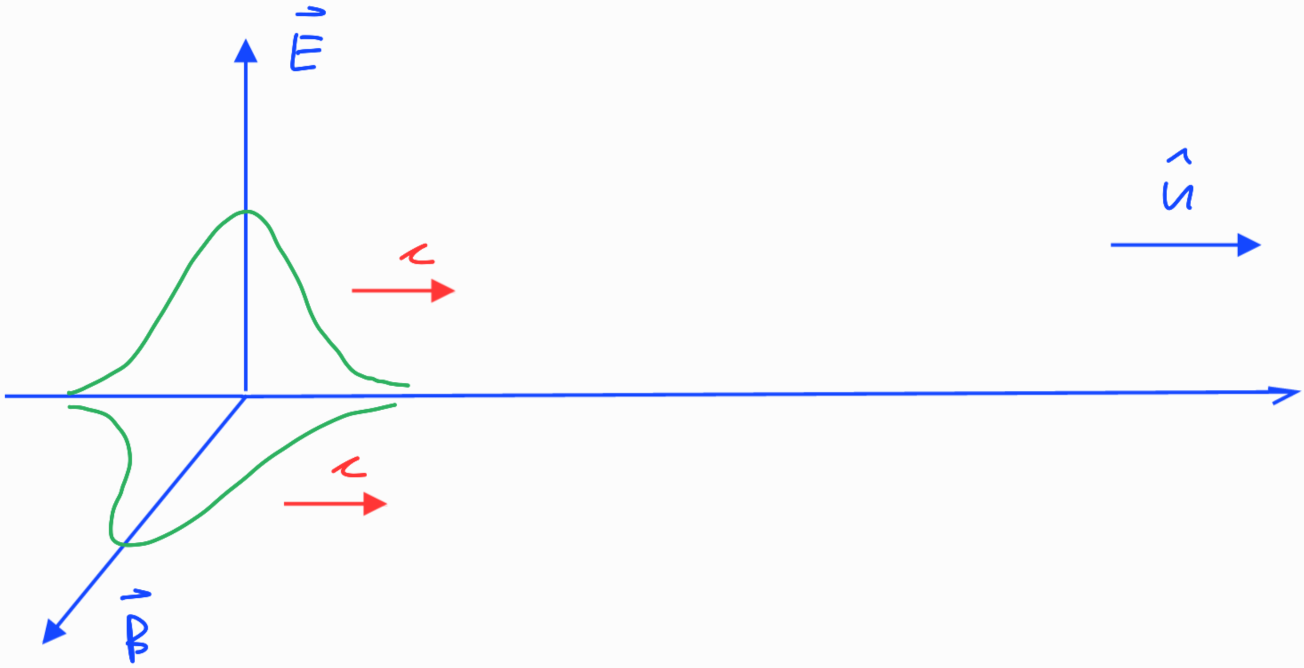
Zusammenfassung:

- $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind <u>transversal</u>, d.h.

$$\vec{E}, \vec{B} \perp \hat{n}$$

- $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$

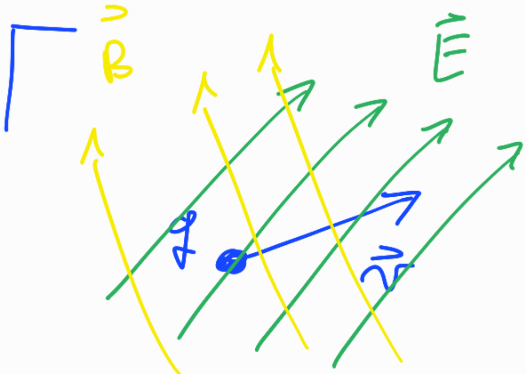
- $\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}$ bilden rechtshändiges Orthogonalsystem



Elektromagnetische Energiedichte und Energiestromdichte, Energiesatz der Elektrodynamik

Ausgangspunkt: Lokale mechanische Leistungsdichte des el.-mag. Felds:

$$\boxed{p = -\langle \vec{j}, \vec{E} \rangle}$$



Ladung q mit Geschw. $\vec{v}$ erfährt Lorentzkraft

$$\vec{F}_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times B)$$

→ während Δt wird Arbeit

$$\Delta A = -\langle \Delta \vec{S}, \vec{F}_q \rangle = -\langle \vec{v}\,\Delta t, \vec{F}_q \rangle$$

$$= -\langle \vec{v}\,\Delta t, q\vec{E} \rangle$$

am gelad. Teilchen verrichtet, d.h.

mit mech. Leistung $\quad P = \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = -\langle q\vec{v}, \vec{E} \rangle$.

→ Leistungsdichte:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta Vol} = -\left\langle \frac{\Delta q}{\Delta Vol}\vec{v}, \vec{E} \right\rangle$$

$$= -\langle \rho\,\vec{v}, \vec{E} \rangle = -\langle \vec{j}, \vec{E} \rangle$$

nach Ampère-Maxwell $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

somit

$$p = \varepsilon_0 \left\langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle - \frac{1}{\mu_0}\langle \operatorname{rot}\vec{B}, \vec{E} \rangle$$

Zwecks Umformung in eine (verallg.)

Kontinuitätsgleichung verwenden wir:

- $\left\langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{E}|^2$
- $\left\langle \vec{B}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{B}|^2$
- $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) = \langle \vec{B}, \underbrace{\operatorname{rot}\vec{E}}_{= -\partial B/\partial t} \rangle - \langle \vec{E}, \operatorname{rot}\vec{B} \rangle$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{B}|^2 - \langle \operatorname{rot}\vec{B}, \vec{E} \rangle$$

→

$$\eta = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{B}|^2 + \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right)}_{=:\, u} + \operatorname{div}\Big(\underbrace{\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}_{=:\, \vec{S}}\Big)$$

mit <u>Energiedichte</u> $u(\vec{r},t)$ und <u>Energiestrom-dichte</u> $\vec{S}(\vec{r},t)$ (auch: „Poynting vektor") def. durch

$$\boxed{\begin{aligned} u &:= \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2 \\ \vec{S} &:= \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \end{aligned}}$$

erhalten wir (verallg.) Kontinuitätsgl. für Energiedichte:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\langle \vec{j}, \vec{E}\rangle}$$

$\hat{=}$ Energiesatz der E.D.

Integration über bel. Volumen V + S.v. Gauß

ergibt integrale Version:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u \, d^3\vec{r}}_{\text{el.-mag. Energie im Vol. } V} = -\underbrace{\int_{\partial V} \vec{S} \, d\vec{f}}_{\text{Energiefluss durch Oberfl. von } V} - \underbrace{\int_V \langle \vec{j}, \vec{E} \rangle \, d^3\vec{r}}_{\text{mechanische Leist. im Vol. } V}}$$