

Elektrodynamische Potenziale, inhomogene Wellengleich.

Erinnerung: Elektrostatik:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad \Delta \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (\text{Poisson-Gl.})$$

$$\rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

Magnetostatik:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (\text{in Coulomb-} \\ \text{eichung: } \operatorname{div} \vec{A} = 0)$$

$$\rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

Elektrodynamik:

$$\rho(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t) ?$$

Vektorpotenzial:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

(wie zuvor)

Skalarpotential:

wegen $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ i. A. $\vec{E}(\vec{r}, t)$ nicht konservativ,

aber $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ist konservativ, da

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{A}}_{= \vec{B}} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \text{grad } \phi$$

$\uparrow$ Skalarpotential $\phi(\vec{r}, t)$

a. b. $\vec{E} = - \text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (2)

(1) und (2) eingesetzt in Ampère-Maxwell u.

Gauß führt in Lorenz bedingung

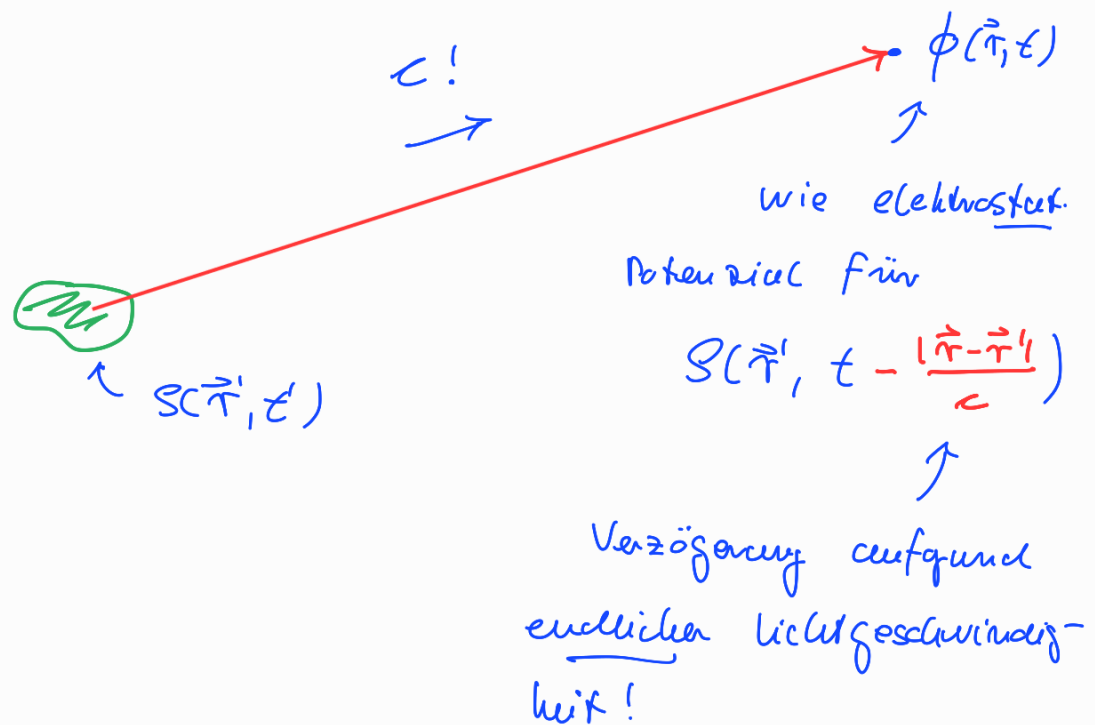
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \text{div } \vec{A} \stackrel{!}{=} 0$$

auf inhomogene Wellengleichungen

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Lösungen?



retardierte Potentiale:

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{S(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \\
 \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'
 \end{aligned}$$

sind Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen und

erfüllen die Lorenzbedingung $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0$

(erfordert etwas längere Rechnung!)

elementares Beispiel:

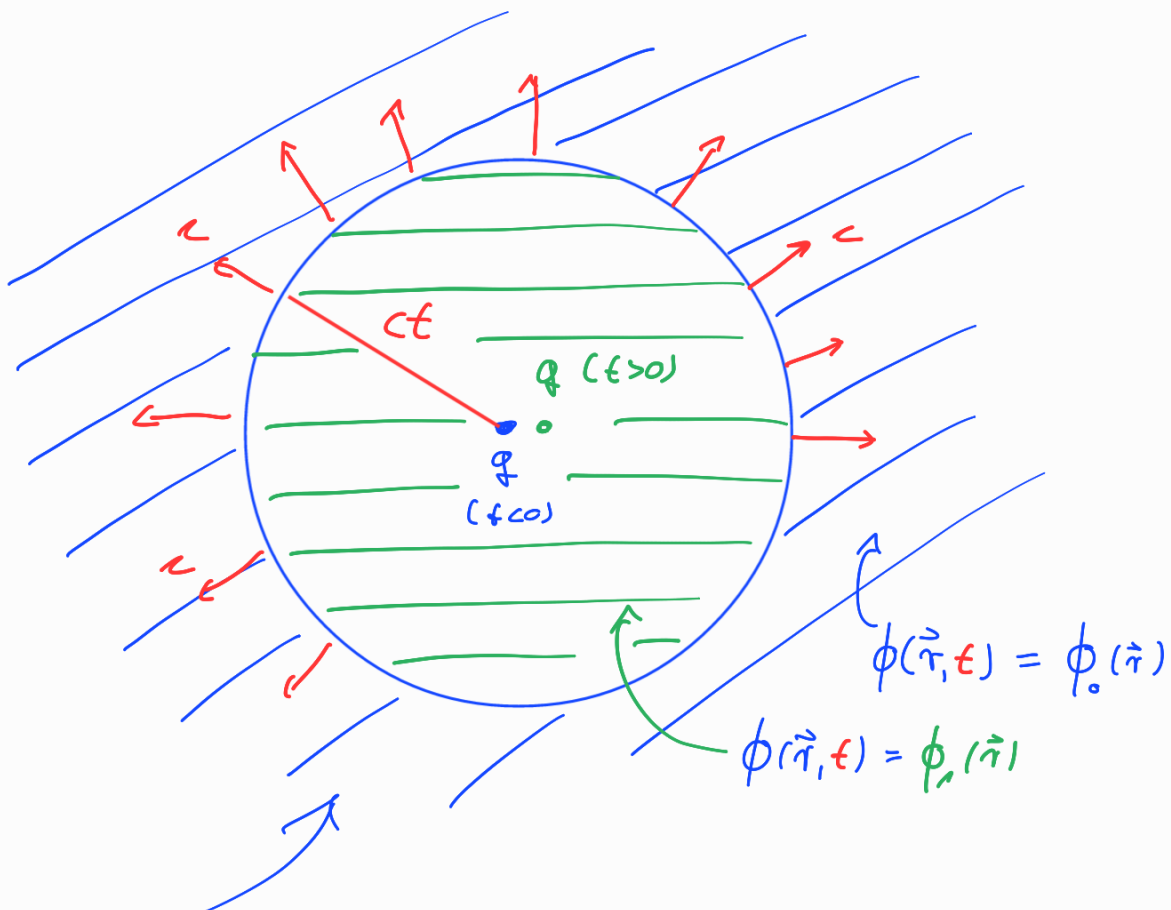
$S(\vec{r}, t), \vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{\wedge}{=} \text{Verrückung einer Pkt. Ldg. } q \text{ in}$

• 0 für $t < 0$ nach

• $\vec{E}$ für $t > 0$

→ für $|\vec{r}| \gg |\vec{E}|$ in guter Näherung:

$$\phi(\vec{r}, t) = \begin{cases} \phi_0(\vec{r}) & : \quad t < |\vec{r}| \\ \phi_1(\vec{r}) & : \quad t > |\vec{r}| \end{cases}$$



auslaufende Kugelwelle

Neben retardierten Potenzen sind sog. advanced Potenzen

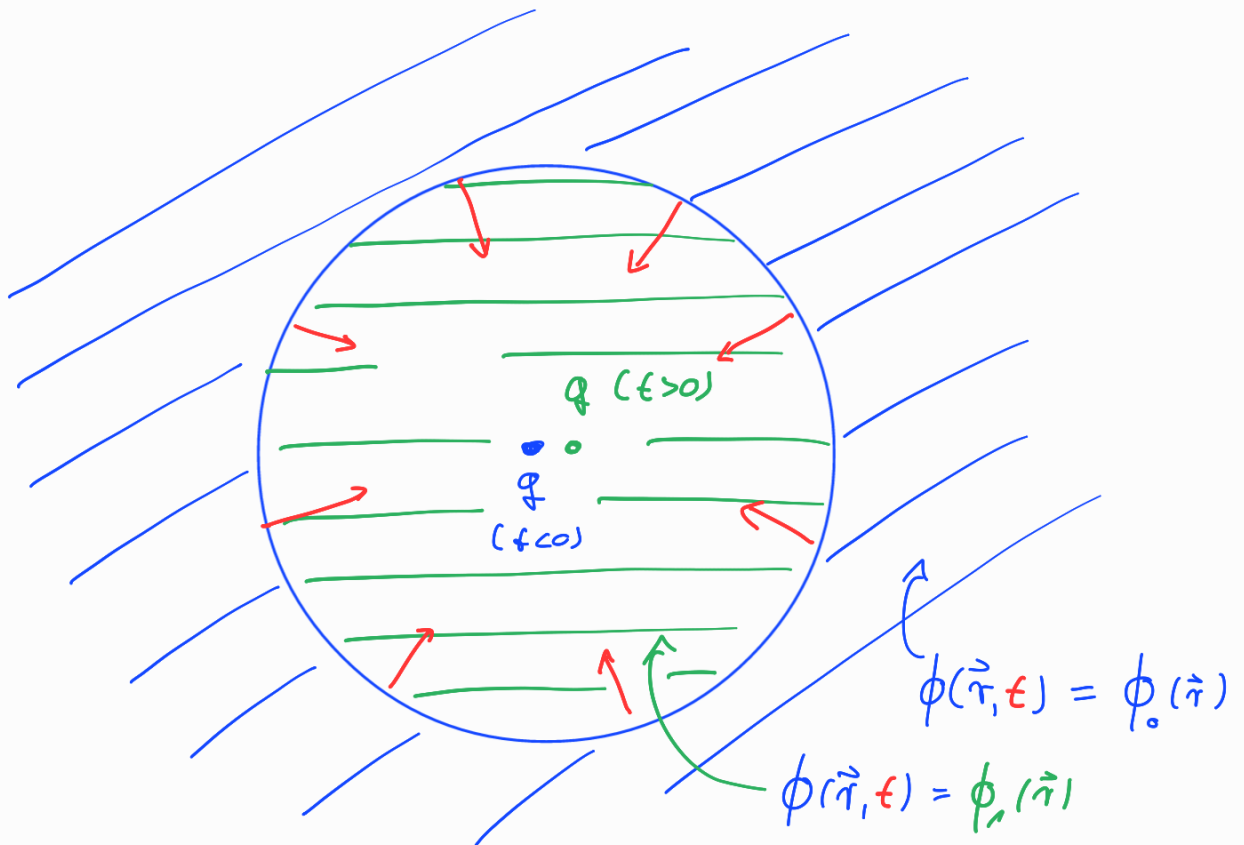
$$\phi_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$\vec{A}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

ebenfalls Lösungen (in Lorenz-Normierung) der inhom.

Wellengleichungen, führen auf einlaufende

Wellen:



Beobachtet worden i.d.R. die reforzierten Lösungen,
da für diese die Aufgabsbedingungen lokal und
damit im Experiment realisierbar sind.