

Exkurs:

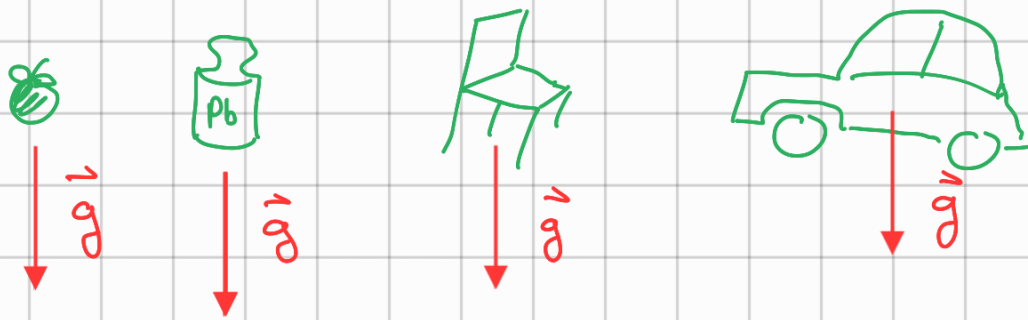
Träge und schwere Masse, Gravitation

Schwaches Äquivalenzprinzip

erstaunliche (?!) Beobachtung (seit Galilei):
1564 - 1642

alle Körper fallen mit derselben

Schwerebeschleunigung $\vec{g} \approx -9,81 \text{ m/s}^2 \vec{e}_3$!

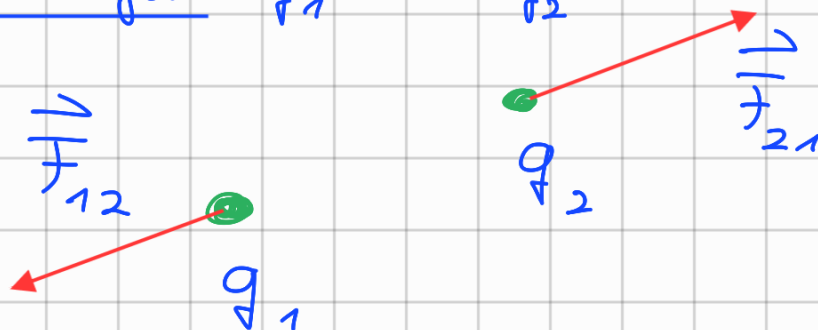


unabhängig von Form, Material, Träger Masse...

→ Gravitation!

strukturell ähnlich Coulomb-Kraft zwischen

elektr. Ladungen q_1 und q_2 :



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Coulomb-Kraft

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}|, \quad \hat{r}_{12} = \vec{r}_{12} / r_{12}$$

Gravitationskraft zwischen zwei Massen

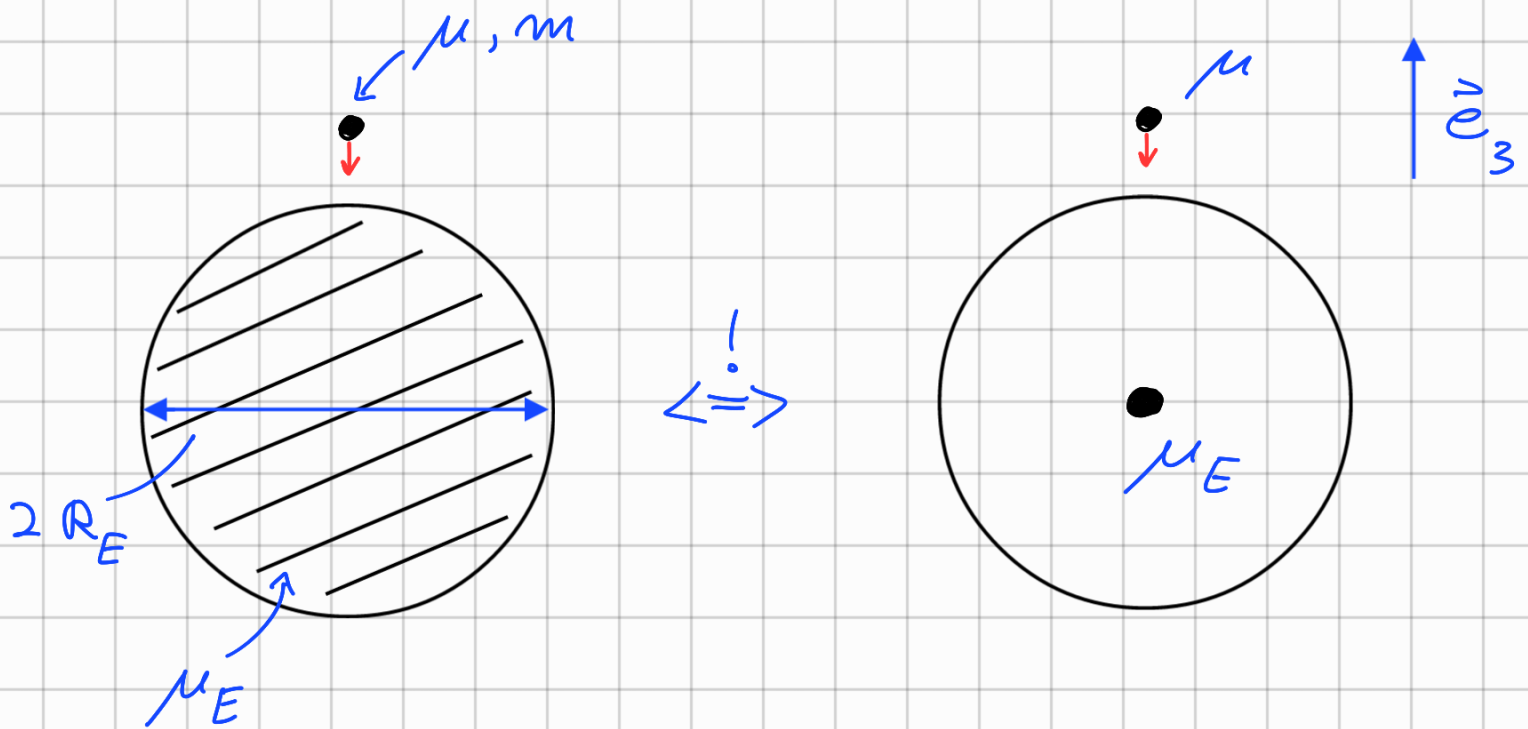
mit schweren Massen (!) μ_1 und μ_2 :



$$\vec{F}_{12} = -G \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

(Newton)

→ freier Fall nahe Erdoberfläche
aufgrund Gravitationskraft der Erde:

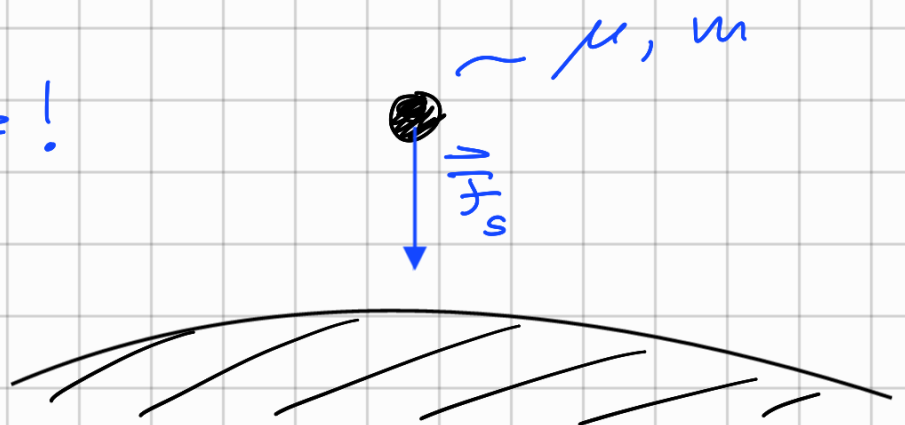


→ Schwerkraft auf MP mit schwerer
Masse μ :

$$\vec{F}_s = - \underbrace{\frac{G \mu_E \cdot \mu}{R_E^2}}_{g \approx 9,81 \text{ m/s}^2} \vec{e}_3$$

→ $\vec{F}_s = - \mu g \vec{e}_3$ (*)

schwere Masse!



→ freier Fall:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2.G. & & (*) & & \\ & & \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & & \\ m \vec{a} & = & \vec{F}_s & = & - \mu g \vec{e}_3 & & \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \text{träge Masse} & & & & \text{schwere Masse} & & \end{array}$$

→ Schwere beschleunigung:

$$\vec{a} = - \frac{\mu}{m} g \vec{e}_3$$

alle Körper fallen mit $\vec{a} = -g \vec{e}_3$
(Beobachtung)

→ für alle Körper ist

$$\frac{\mu}{m} \stackrel{!}{=} \text{const.} \equiv 1$$

↑
Konvention!

„träge Masse und schwere Masse sind
strikt proportional“

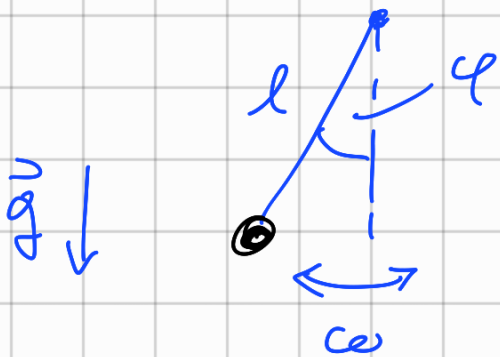
($\hat{=}$ "Schwaches Äquivalenzprinzip")

→
Einssein

Allgemeine Relativitätstheorie

Newton : $\left| \frac{\mu}{m} - 1 \right| \leq 10^{-4}$

↑ mittels Pendel experimente:



$$\underline{m} l \ddot{\varphi} = - \underline{\mu} g \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\underline{\mu}}{\underline{m}}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

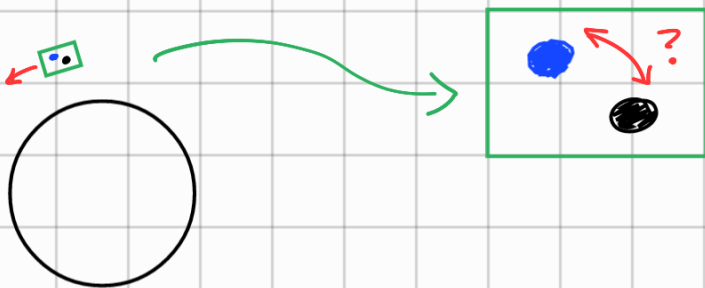
heute :

$$\left| \frac{\mu}{m} - 1 \right| \leq \underline{10^{-15}} !$$

(14.9.2022)

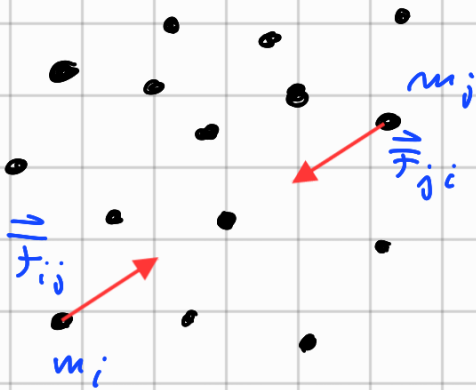
↑

mittels frei fallender Testkörper aus
Platin und Titan innerhalb eines Satellit:



Newtonsches N -Teilchen System, Erhaltungsgrößen

↳ N MPe mit Massen $m_1, m_2, \dots, m_N$
an Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$



(z.B. Gas, Flüssigkeit,
Festkörper, ..., Sonnensyst.
..., Galaxie, ..., Universum)

- interne kräfte $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$
- externe kräfte $\vec{F}_i^{\text{ex}}(\vec{r}_i)$

(z.B. N.G.: $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$)

→ kraft auf i -ten MP:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \vec{F}_i^{\text{ex}}(\vec{r}_i)$$

→ N Bewegungsgleichungen:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

$\hat{=}$ 3 N gekoppelte DGLen 2. Ordnung

→ Bahnen $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$,

determiniert z.B. durch Anfangs-
und -geschwindigkeiten!

- analytische Lsgen i.d.R. nur für $N \leq 2$!

- numerische Lsgen auch für $N \gg 1$!

z.B. "Millennium-Simulation" zur

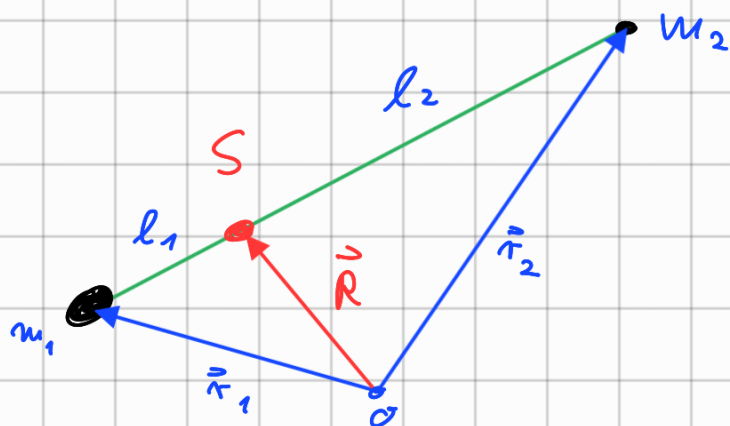
Strukturbildung im Universum, $N \approx 10^{10}$!

dabei sehr hilfreich: Erhaltungssätze für

- Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$
(Ortsvektor)
 - Impuls: $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$
 - Drehimpuls: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
- (mit Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$)

Anmerkungen:

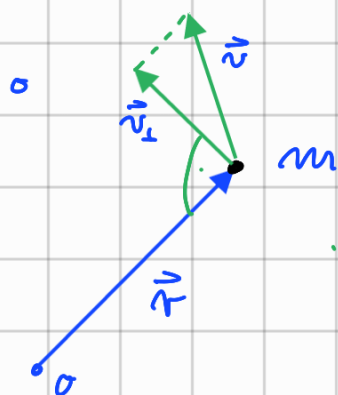
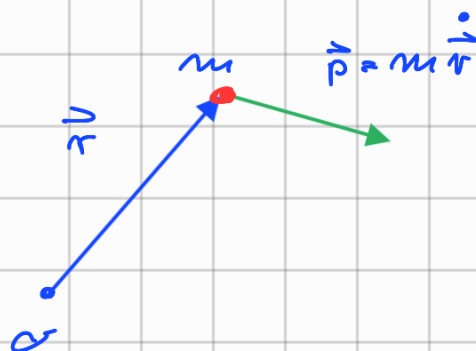
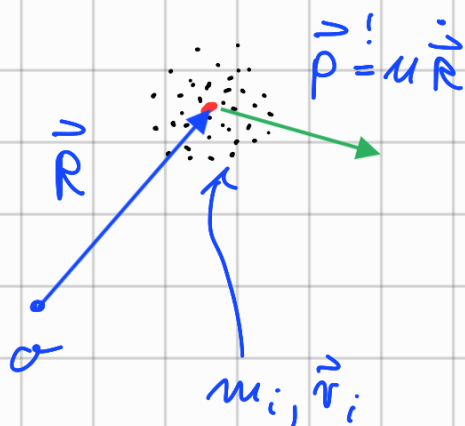
- $N=2$: Schwerpunkt S mit Ortsvektor $\vec{R}$ teilt Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnis der Massen:



$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

(vgl. übg.)

- offenbar $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$; genau wie $\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$!



$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

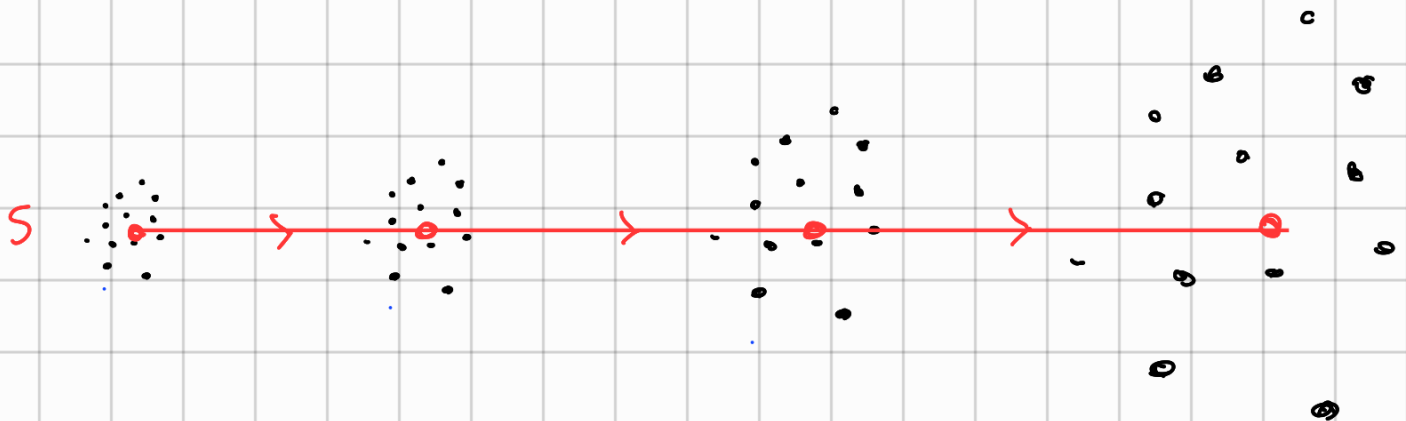
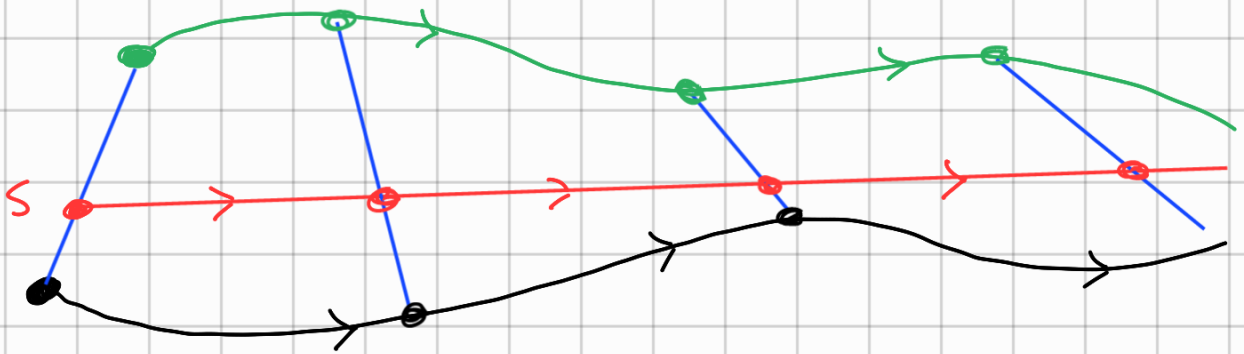
$$\perp \vec{r}, \vec{v}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{v}_\perp|$$

Satz :

Impuls $\vec{P}$ und Drehimpuls $\vec{L}$ eines abgeschlossenen Systems (d.h. $\vec{F}_i^{\text{ex}} = \vec{0}$) sind konstant; der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit
 $\vec{V} = \vec{P} / M$.

z. B.:



Beweis der Impulserhaltung: z.Z.: $\dot{\vec{p}} = \vec{0}$!

für $N=2$:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2$$

$$\begin{array}{lcl} \text{2.G.} & \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} & \text{3.G.} \\ = & & = \vec{0} \end{array} \quad \checkmark$$

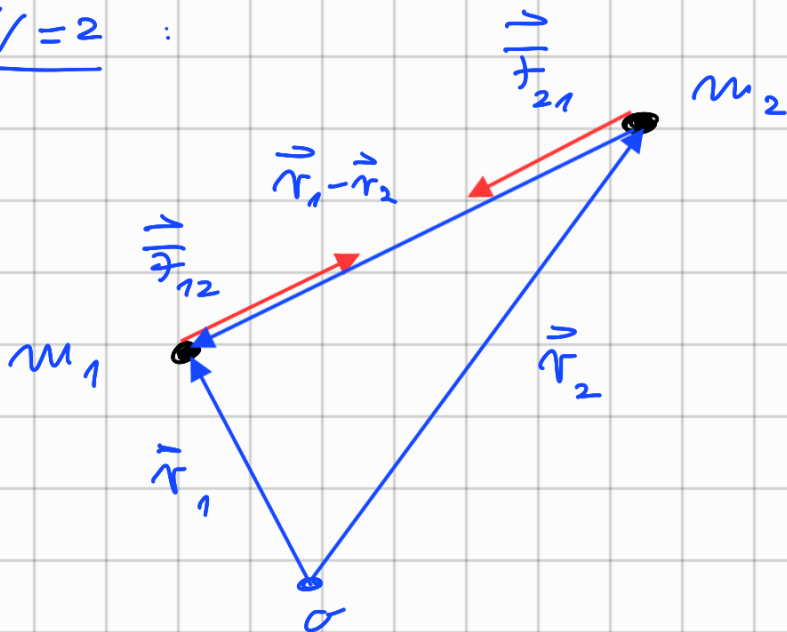
für allg. N :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \sum_i \dot{\vec{p}}_i \stackrel{\text{2.G.}}{=} \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\underbrace{\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}}_{\substack{\stackrel{\text{2.}}{=} \vec{0} \\ \text{3.G.}}}) = \vec{0} \end{aligned}$$

→ Schwerpunkts gesch $\dot{\vec{R}} = \vec{P}/M$ konstant!

Beweis der Drehimpulserhaltung :

N=2 :



$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\text{mit } \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\rightarrow \dot{\vec{L}}_i = \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \stackrel{\text{2.G.}}{=} \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{\substack{\stackrel{!}{=} \vec{0} \\ \text{da } \dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{p}_i}} + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \stackrel{\text{2.G.}}{=} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{\vec{L}} &= \dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\uparrow$
 da $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

für allg. N :

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

mit $\vec{F}_i = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$ also

$$\vec{L} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ij} \quad || \text{z.B.}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_j}_{\substack{|| \\ \vec{0} \text{ da } \vec{F}_{ij} || \vec{r}_i - \vec{r}_j}}) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$