

Konservatives N -Teilchen-System, Energieerhaltung

Erinnerung (Math. Meth. WS 21/22, VL 21, 22) :

$N=1$ Teilchen im konservativen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$,

d.h. per def.

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \operatorname{grad} U(\vec{r})$$



Potential zu $\vec{F}(\vec{r})$

für Bahn $\vec{r}(t)$ gemäß $m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$:

kinetische Energie

$$T(t) := \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2$$

potenzielle Energie

$$V(t) := U(\vec{r}(t))$$

→ Gesamtenergie

$$E(t) = T(t) + V(t)$$

ist konstant !

► denn:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = \quad \quad \quad \rightarrow$$

$$= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle + \frac{d}{dt} U(\vec{r})$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2} \langle \ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle}_{\parallel \langle \vec{F}(\vec{r}), \dot{\vec{r}} \rangle} + \underbrace{\langle \text{grad } U(\vec{r}), \dot{\vec{r}} \rangle}_{\parallel -\vec{F}(\vec{r})}$$

$$= 0$$

conservative N -Teil.-System:

$\Rightarrow$ conservative externe Kräfte:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = - \text{grad } U_i(\vec{r}_i)$$

↑
externes Potential

conservative Wechselwirkungs-kräfte:

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = - U'_{ij}(r_{ij}) \hat{r}_{ij}$$

mit W.W.-Potential $U_{ij}(r) = U_{ji}(r)$

mit $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$
 $\hat{r}_{ij} = \vec{r}_{ij} / r_{ij}$

Symmetrie $U_{ij}(r) \stackrel{!}{=} U_{ji}(r)$

$$\rightarrow \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) \stackrel{!}{=} -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_{ji})$$

Bekannt $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ genügen Bewegungsgl.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i^{\text{ges}}(\vec{r}_i) \quad ;$$

kinetische Energie

$$T(t) := \sum_i \frac{m_i}{2} |\dot{\vec{r}}_i(t)|^2$$

potenzielle Energie

$$V(t) := \underbrace{\sum_i U_i(\vec{r}_i(t))}_{V_{\text{ex}}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}(r_{ij})}_{V_{\text{int}}(t)}$$



Energieerhaltungssatz

Die Gesamtenergie $E = T(x) + V(x)$ eines konservativen Systems ist konstant.

Beweis: z.z.: $\dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = 0$!

(i) $\dot{T} = \sum_i \langle m_i \ddot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle = \sum_i \langle \vec{F}_i^{\text{ges}}, \dot{\vec{r}}_i \rangle$

(ii) $\dot{V}_{\text{ex}} = \sum_i \frac{d}{dt} U_i(\vec{r}_i) = \sum_i \underbrace{\langle \text{grad } U_i(\vec{r}_i), \dot{\vec{r}}_i \rangle}_{= -\vec{F}_i^{\text{ex}}}$
 $= \sum_i \langle -\vec{F}_i^{\text{ex}}, \dot{\vec{r}}_i \rangle$

(iii) $\dot{V}_{\text{ww}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} U'(r_{ij}) \frac{d}{dt} r_{ij}$

Berechnung von $\frac{d}{dt} r_{ij}$: Sei $\vec{r}_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow r_{ij} = \left(\sum_{v=1}^3 x_v^2 \right)^{1/2} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{1}{r_{ij}} \sum_{v=1}^3 x_v \dot{x}_v$
 $= \langle \vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij} \rangle$

d.h.: $\frac{d}{dt} r_{ij} = \langle \hat{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij} \rangle$ (*)

(*)
→

$$\begin{aligned}\dot{V}_{ww} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle u_{ij}(r_{ij}) \hat{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\underbrace{\langle -\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}), \dot{\vec{r}}_i \rangle}_{\text{!}} + \underbrace{\langle \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}), \dot{\vec{r}}_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_{ji})}} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{! \\ = \\ i \leftrightarrow j}}\end{aligned}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \langle -\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}), \dot{\vec{r}}_i \rangle$$

$$= \sum_i \langle \underbrace{-\sum_j \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij})}_{-\vec{F}_i^{w.w.}}, \dot{\vec{r}}_i \rangle$$

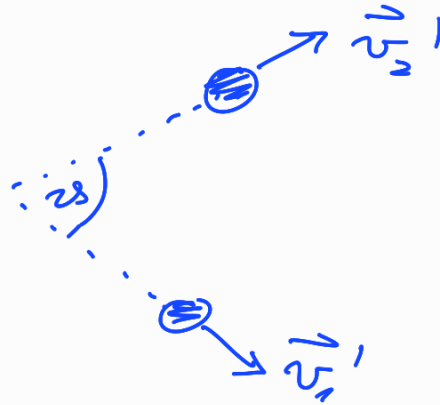
(i), (ii), (iii):

$$\dot{E} = \sum_i \langle \underbrace{\vec{F}_i^{gr} - \vec{F}_i^{\alpha} - \vec{F}_i^{w.w.}}_{\substack{\perp \\ = 0}}, \dot{\vec{r}}_i \rangle = 0$$

Bsp.: MP 1 der Masse m stößt elastisch
ruhenden MP 2 gleicher Masse:



nach dem Stoß:



Wir zeigen: Energie + Impuls erhaltung $\rightarrow v_2 = \frac{T}{2}$!

$$E = \text{konst.} : \quad \frac{m}{2} |\vec{v}_1|^2 = \frac{m}{2} |\vec{v}_1'|^2 + \frac{m}{2} |\vec{v}_2'|^2 \quad (*)$$

$$\vec{P} = \text{konst.} : \quad m \vec{v}_1 = m \vec{v}_1' + m \vec{v}_2'$$

$$|\vec{v}_1|^2 = \underbrace{|\vec{v}_1'|^2 + |\vec{v}_2'|^2}_{\substack{= (*) \\ |\vec{v}_1|^2}} + 2 \langle \vec{v}_1', \vec{v}_2' \rangle$$

$$\rightarrow \langle \vec{v}_1', \vec{v}_2' \rangle = 0 \quad \text{d.h.} \quad \vec{v}_1' \perp \vec{v}_2' \quad \blacksquare$$