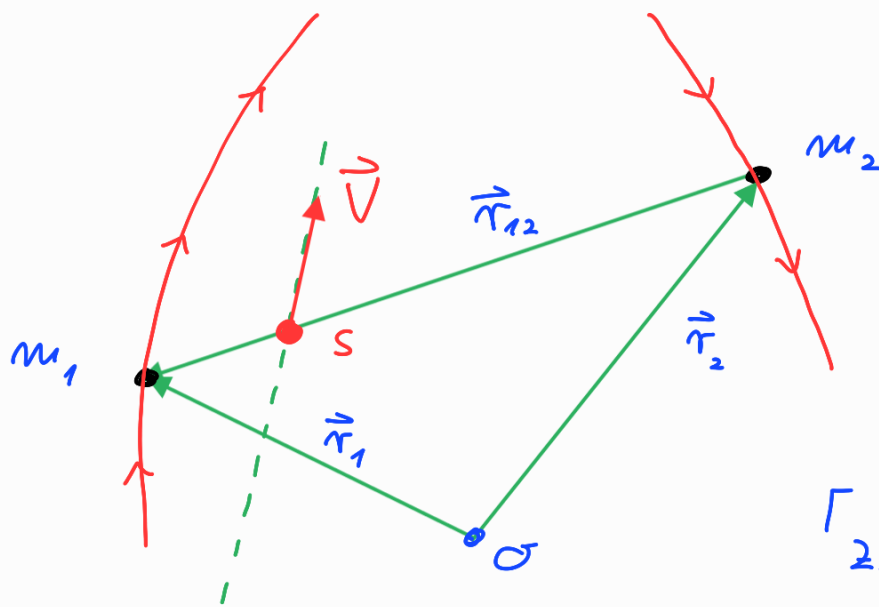


Zwei-Körper-Problem, Keplersche Gesetze



$$M = m_1 + m_2$$

z.B. Erde-Mond,
Sonne-Planet,
Doppelsternsystem
⋮

Wechselwirkungskraft:

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12}) = -\vec{F}_{21}(\vec{r}_{21})$$

Ziel: Bestimmung der Bahnen $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$!

≥ 6 Koordinatenfunktionen
 $x_{11}(t), \dots, x_{23}(t)$

Strategie: nutze Erhaltung von Impuls,
Drehimpuls und ggf. Energie!

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \text{ konstant}$$

→ SP bewegt sich geradl.-gl. mit $\vec{V} = \vec{P}/M$

$$\vec{R}(t) = R_0 + \vec{V}t$$

→ Trofo auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\begin{array}{l} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} \underline{\vec{R}} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / M \\ \underline{\vec{r}} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array}$$

└ Rücktrofo:

$$\begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{r} \end{array} \mapsto \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{array}$$

$$\vec{R}(t) \quad \checkmark$$

$$\underline{\vec{r}}(t) \quad ?$$

Dynamik der Relativkoordinaten:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_{21}) = -\vec{F}_{12}(\vec{r}_{12})$$

mit reduzierter Masse $\mu := m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

und $\vec{F}(\vec{r}) := \vec{F}_{12}(\vec{r})$ also:

$$\mu \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

↑

Dynamik eines Teilchens der reduz.

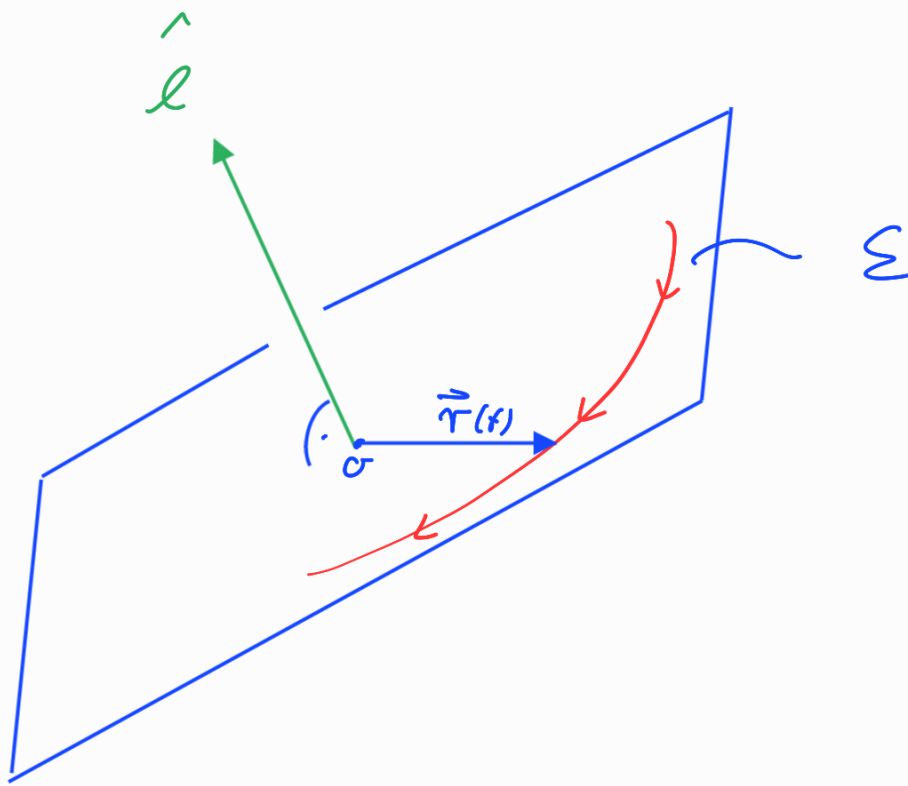
Masse μ im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad \text{ist konstant!}$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \dot{\vec{L}} &= \underbrace{\mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}}}_{\substack{= \vec{r} \times \vec{F} \\ =0}} = 0! \end{aligned}$$

→ $\vec{r}(t)$ für alle Zeiten in Bewegungsebene $E \subset \mathbb{R}^3$:
 $\hat{L} \perp E$
 $0 \in E$

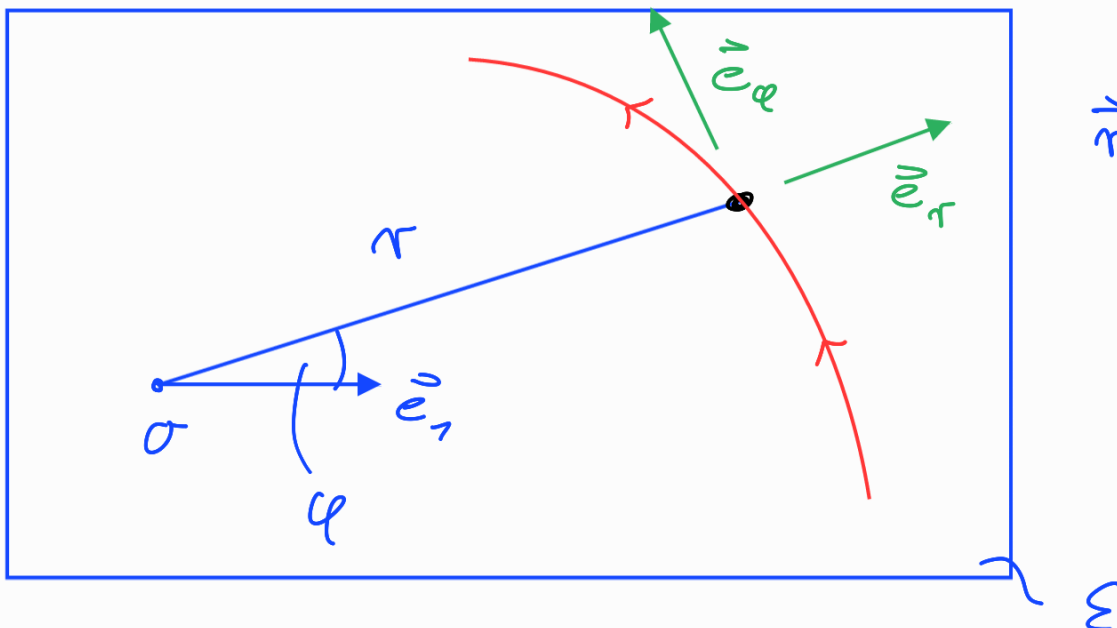


┐ denn für alle t :

$$\begin{aligned} \langle \vec{l}, \vec{r}(t) \rangle &= \langle \vec{l}(t), \vec{r}(t) \rangle \\ &= \langle \underbrace{\mu \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)}_{\perp \vec{r}}, \vec{r}(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

┘

verwende Polarkoordinaten für $\vec{r}(t) \in E$:



$$\vec{r} = r(t) \vec{e}_r(t)$$



$$\rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$\rightarrow$ Drehimpuls $\vec{l}$ in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \mu r^2 \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{= \vec{e}_z} \end{aligned}$$

d.h. $\vec{l} = l \vec{e}_z$ mit konstant

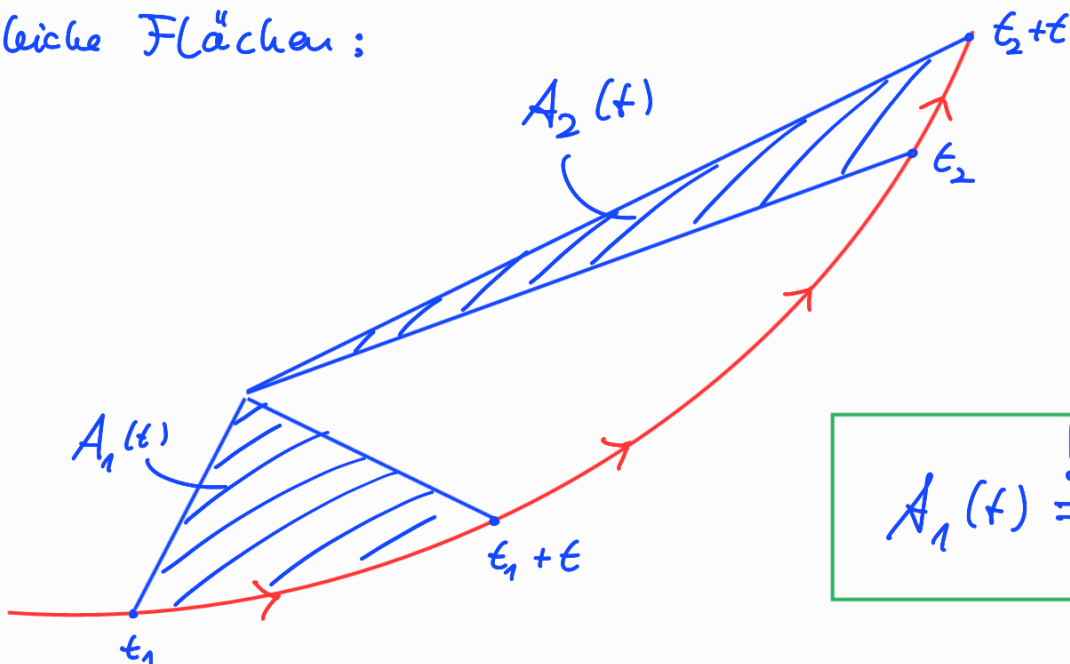
$$l = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

Azimuthalgleichung

$\rightarrow$ Flächensatz:

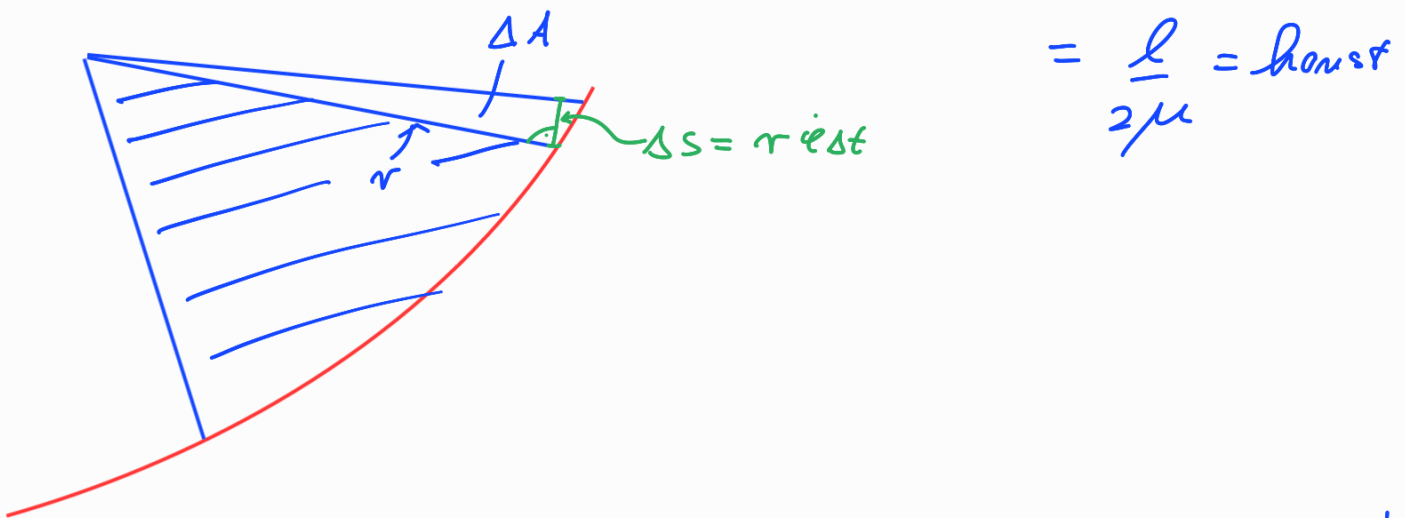
Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten

gleiche Flächen:



$$A_1(t) \stackrel{!}{=} A_2(t)$$

┐ denn $\frac{\Delta A(t_0, t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot \dot{\varphi}$



Falls W.W. konserverativ, d.h.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(|\vec{r}|)$$

$$(\quad = -U'(|\vec{r}|) \hat{r} \quad),$$

Energieerhaltung

$$E = \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + U(\vec{r}(t)) = \text{konst.}$$

in Polarkoordinaten:

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$



→

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{=: U_{\text{eff}}(r)} \quad (*)$$

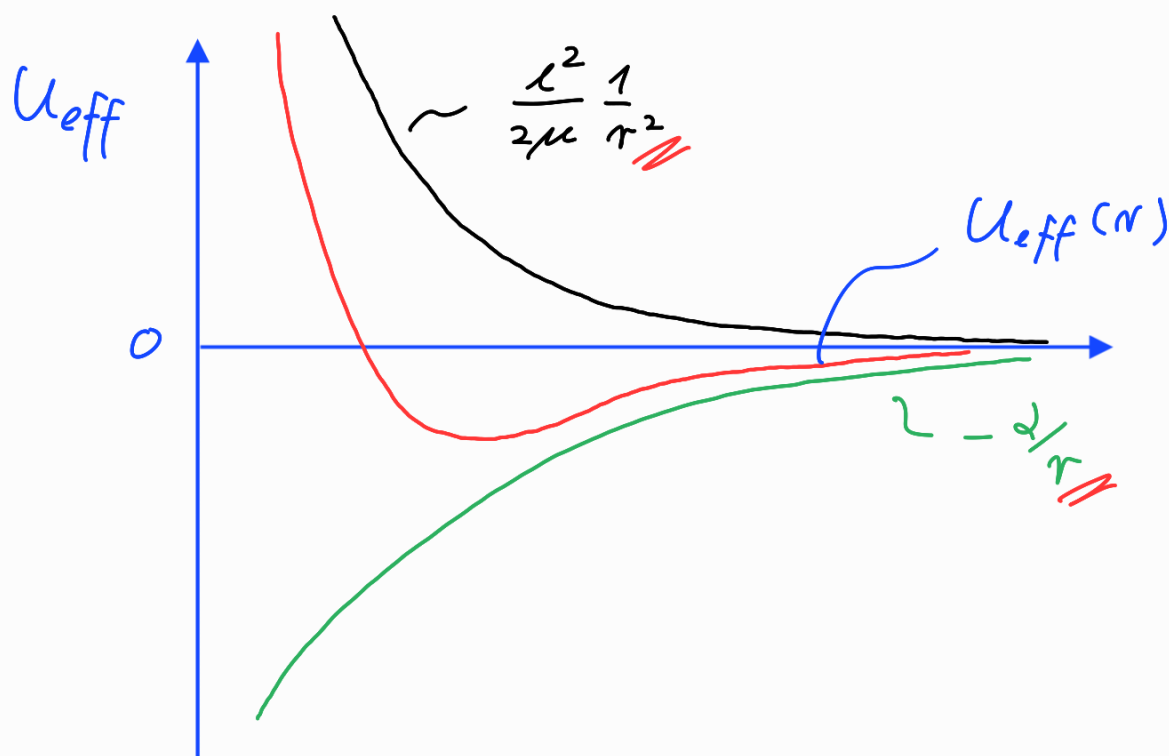
$$=: U_{\text{eff}}(r)$$

effektives Potenzial

$\hat{=}$ Energiegleichung eines 1D-Teilchens
der Masse μ im eff. Pot. $U_{\text{eff}}(r)$

$$\rightarrow \underline{r(t)} \xrightarrow{\dot{r} = l/\mu r^2} \underline{\varphi(r)} !$$

qualitativ z.B. für $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$: ($\alpha = Gm_1m_2$)



für $E < 0$: $r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max}$
 ($l \neq 0$)

für $E \geq 0$: $r_{\min} \leq r(t)$

genauer :

(*) $\rightarrow$

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r(t)))}$$



DGL 1. Ordnung zur Best. von $r(t)$

(z.B. mittels "Trennung der Variablen")