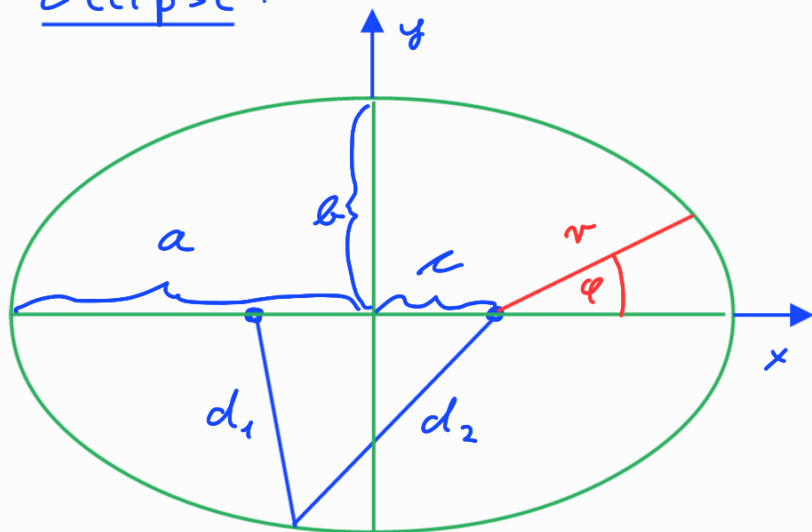


Keplersche Gesetze:

- 1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen,
Sonne im Brennpunkt
- 2) Flächensatz
- 3) Umlaufzeiten $T_1, \dots, T_g$ und
große Halbachsen $a_1, \dots, a_g$ genügen

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = \kappa$$

Ellipse:



a : große Halbachse

b : kleine Halbachse

$\varepsilon := \kappa/a$: Exzentrizität

- $d_1 + d_2 = 2a$

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

Relationen

- $a^2 = b^2 + \kappa^2$

- $p = (1 - \varepsilon^2) a$

- $p = \frac{b^2}{a}$

└

Wir zeigen:

Newton. Mechanik + Gravitation $\rightarrow$ Kepl. Gesetze !

$$\hookrightarrow U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = G m_p m_s$$

Energieerl:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}}_{= U_{\text{eff}}(r)}$$

mit red. Masse $\mu = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s}$, $l = |\vec{l}|$

(vgl. Vols. 7)

$$\rightarrow \dot{r}(t) = \pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r(t))) \right]^{1/2} \quad (*)$$

mit $r(t) \stackrel{!}{=} r(\varphi(t))$ erhalten wir eine

leichter zu lösende DGL für die Bahnkurve

$r(\varphi)$ wie folgt:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \stackrel{(*)}{=} \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{l}{\mu r^2} = \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r(\varphi))) \right]^{1/2}$$

Azimutthalge: $l = \mu r^2 \dot{\varphi}$

$\varphi(t) \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} &= r^2 \left[\frac{2\mu}{\ell^2} \left(E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \frac{2}{r} \right) \right]^{1/2} \\
 &= r^2 \left[\underbrace{\frac{2\mu E}{\ell^2}}_{=: A} - \frac{1}{r^2} + 2 \underbrace{\frac{\mu a}{\ell^2}}_{=: B} \frac{1}{r} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = r^2 \left[A + 2B \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}$$

↖ DGL für $r(\varphi)$, Lösung mittels

"Trennung der Variablen" (vgl. Math. Meth.):

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r_\varphi} \frac{dr}{r^2 \left(A + 2B \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{1/r_\varphi}^{1/r_0} \frac{ds}{\left(A + 2Bs - s^2 \right)^{1/2}} \\
 \text{Subst.: } r &= \frac{1}{s} \\
 &\quad \underbrace{A + 2Bs - s^2}_{=: -(s-B)^2 + B^2}
 \end{aligned}$$

$$dr = -\frac{1}{s^2} ds = -r^2 ds$$

mit Subst. $s = s' + B$ folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{1/r_\varphi - B}^{1/r_0 - B} \frac{ds'}{\sqrt{A + B^2 - s'^2}}$$

$$\begin{aligned} \uparrow &= - \arccos \frac{s'}{\sqrt{A + B^2}} \Big|_{1/r_\varphi - B}^{1/r_0 - B} \\ (\arccos \frac{x}{a})' &= \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \arccos \frac{1/r_\varphi - B}{\sqrt{A + B^2}} - \arccos \frac{1/r_0 - B}{\sqrt{A + B^2}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\stackrel{!}{=} \varphi_0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{1/r_\varphi - B}{\sqrt{A + B^2}}$$

$$\rightarrow r(\varphi) = \frac{1}{B + \sqrt{A + B^2} \cos \varphi} = \frac{1/B}{1 + \sqrt{1 + \frac{A}{B^2}} \cos \varphi}$$

$$= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{mit } p = 1/B = \frac{d\mu}{e^2},$$

$$\underline{\underline{\varepsilon^2 = 1 + \frac{A}{B^2} = 1 + \frac{2e^2}{d^2 \mu} \cdot E}} \quad \rightarrow$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{parametrisiert}$$

- Ellipse für $\varepsilon < 1 \quad \Leftrightarrow \quad E < 0$
- Parabel für $\varepsilon = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0$
- Hyperbel für $\varepsilon > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0$

beachte:

$$r(\varphi) \stackrel{!}{=} r(\varphi + 2\pi)$$

d.h. Planeten laufen auf geschlossenen
Bahnen!

(nur für $1/r$ und r^2
Potenziale!)

- damit 1. kepl. Gesetz gezeigt.
- 2. Gesetz = Flächensatz = Drehimpulserhaltung ✓

noch zu zeigen: 3. Gesetz: $\frac{T_i^2}{a_i^3} = \text{const} \quad \rightarrow$

Flächensatz $\rightarrow$ konstante Flächengeschw.

$$u = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2\mu}$$

$\rightarrow$ Umlaufzeit

$$T = \frac{\text{Flächeninhalt der Ellipse}}{\text{Flächengeschw.}} = \frac{\pi a b}{u}$$

$$= 2\pi \frac{a b \mu}{L} = 2\pi a^{3/2} \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a}}}_{\substack{= \\ \sqrt{\rho}}} \frac{\mu}{L}$$
$$\sqrt{\rho} = \sqrt{\frac{L^2}{\mu a}}$$

$$= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$= 2\pi a^{3/2} \sqrt{G m_s}$$

$\uparrow$
 $m_s \gg m_p \rightarrow \mu = m_p$

$$\rightarrow \frac{\mu}{a} = \frac{m_s}{G m_p m_s} = \frac{1}{G m_s}$$

a.h. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_s}$, 3. Gesetz ✓

$\uparrow$ unabhängig von Planet!